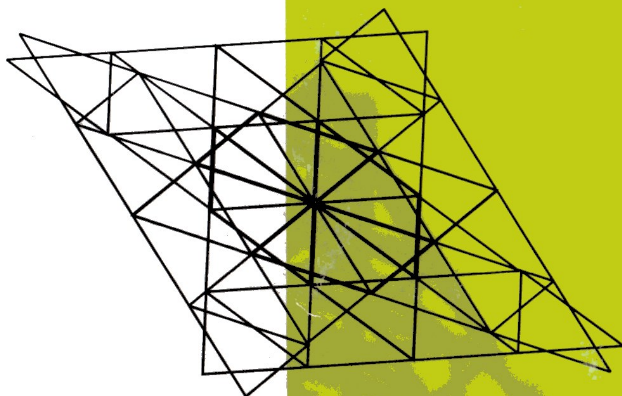
matematikos bibliotekėlė

A. Andžāns
A. Reihenova
L. Ramāna
B. Johannessons



INVARIANTŲ METODAS

A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramana, B. Johannessons

INVARIANTŲ METODAS

TEV
VILNIUS 2003

UDK 517(075.3)
In-168

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Zita Manstavičienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą rinko ir maketavo *Nijolė Drazdauskienė*

Korektorė *Danutė Paukštienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

A. Andžāns, A. Reihenova,
L. Ramāna, B. Johannessons
INVARIANTU METODE

Iš latvių kalbos vertė *Leonas Narkevičius*

ISBN 9955–491–54–X

TURINYS

ĮVADAS

Invariantinio dydžio (invarianto) sąvoka. Mėginkime apibrėžti, kas yra invariantinis dydis.

Invariantiniu dydžiu (invariantu) vadinsime tokį dydį, kuris nagrinėjamame procese nekinta.

Invariantine savybe vadinsime tokią, kuri nagrinėjamame procese yra išsaugoma, nesikeičia, t. y. ją turi visi nagrinėjamieji dydžiai.

Sakysime, mašinos važiavimo greitis visame kelyje nėra nesikeičiantis dydis, nes, pradedant važiuoti, greitis lygus nuliui; tam tikroje kelio atkarpoje jis yra pastovus, t. y. invariantinis.

Supantis sūpynėse, atstumas nuo sūpynių iki skersinio, ant kurio jos pakabintos, yra invariantinis dydis; atstumas nuo sūpynių iki jų stovų nėra invariantinis dydis.

Jau nuo vaikystės, patys to nenujausdami, susiduriame su invarianto sąvoka. Vienos rankos pirštų skaičius yra invariantinis dydis. Skaičiuodami mes kurį nors pirštą pavadiname pirmu, kitą — antru ir t. t., t. y. kiekvienam pirštui priskiriame skaičių — 1, 2, 3, 4, ... Kelis kartus skaičiuodami, galime keisti tvarką, tačiau nuo to skaičiavimo rezultatas nepriklauso.

Invariantai svarbūs visose mokslo srityse. Mokslas gali gyvuoti tiktai tada, kai įvairios objektų savybės yra invariantinės, nesikeičia. Jei visi objektai tarpusavyje skirtųsi ir kiekvieno eksperimento rezultatai būtų skirtingi, tuomet negalėtume kalbėti apie visuotines taisykles ir savybes.

Invariantų metodo esmė. Yra daug uždavinių, kuriuose reikia nustatyti, ar atliekant tam tikras operacijas galima gauti nurodytą rezultatą. Jei teisingas atsakymas *Ne*, tai tokią išvadą dažniausiai pavyksta pagrįsti remiantis invariantų metodu.

Panašių uždavinių sprendimo planas galėtų būti toks. Ieškome tam tikros savybės:

- kurią turi pradiniai dydžiai;
- kuri yra invariantinė, t. y. ją turi visi dydžiai, gaunami atliekant nurodytas operacijas;
- jos neturi tie dydžiai, kuriuos norima gauti kaip atliekamų operacijų rezultatą.

Ši savybė gali būti (tuo skaitytojas įsitikins skaitydamas knygelę) įvairiausia: nagrinėjamas skaičius (ar nagrinėjamų skaičių suma) yra lyginis (nelyginis), dalijasi iš 3, dalijant jį iš 4 gaunama liekana 1 ir pan. Arba: lentelės nuspalvintuose langeliuose esančių vienetų (nulių ir pan.) skaičius visada nelyginis ir t. t. Matome, kad ir pačią invariantinę savybę dažnai nusakome naudodamiesi invariantiniais dydžiais.

Beje, savybės invariantiškumą (kai atliekamų operacijų skaičius baigtinis) įrodyti dažnai padeda matematinės indukcijos metodas.

Leidėjų žodis

Šią knygelę parašė autorių kolektyvas, vadovaujamas garsaus matematiko, Rygos universiteto profesoriaus Agnio Andžano. Profesorius — didelis Lietuvos draugas, ir knygelė atskleidžia ilgą ir sėkmingą kaimynų matematikų bendradarbiavimą. Rengiant vertimą, kai kas buvo pataisyta, patikslinta.

Tikimės, kad ši knygelė užims garbingą vietą mokytojo ir mokinio matematikos bibliotekoje, juoba kad lietuviškos literatūros apie invariantus beveik nėra.



ARITMETINIAI INVARIANTAI

1.1. LYGINUMAS

Nagrinėkime uždavinius, kurių sprendimas remiasi paprasčiausiu pasvarstymu — ar gaunamas lyginis, ar nelyginis skaičius.

1 PAVYZDYS

Yra 10 *audinio gabalų. Kai kuriuos iš jų sukarpius į* 5 *arba* 7 *dalis, visi gautieji gabalai sumaišomi ir kai kurie iš jų vėl sukarpomi į* 5 *arba* 7 *dalis ir t. t. Ar po kurio nors skaičiaus tokių karpymų galima gauti* 1997 *gabalus*?

Sprendimas. Šiek tiek pasvarstę, galime atsakyti: neįmanoma. Dabar patyrinėkime sprendimo eigą, suskirstę ją žingsniais.

1 žingsnis. Imkime vieną audinio gabalą ir sukarpykime į 5 dalis:



Taigi gabalų skaičius po vieno sukarpymo padidėja 4 vienetais, nes $5 - 1 = 4$.

Imkime kitą audinio gabalą ir sukarpykime į 7 dalis:



Gabalų skaičius po šio sukarpymo padidėja 6 vienetais: $7 - 1 = 6$.

2 žingsnis. Toliau tyrinėkime sprendimo eigą. Iš pradžių yra 10 gabalų. Vieną gabalą sukarpius į 5 dalis, gabalų skaičius padidėja 4 vienetais, t. y. gaunama $10 + 4 = 14$ gabalų.

Kitą gabalą sukarpius į 7 dalis, gabalų skaičius padidėja 6 vienetais ir gaunama $10 + 6 = 16$ gabalų.

Išvados:

a) jei pradinis gabalų skaičius buvo 10 (lyginis skaičius), tai sukarpius vieną gabalą gaunama 14 arba 16 (lyginį skaičių) gabalų;

b) atliekant nurodytas operacijas, audinio gabalų skaičiaus lyginumas nesikeičia (buvo lyginis skaičius ir lieka lyginis), todėl niekada negausime nelyginio skaičiaus audinio gabalų.

Invariantinė savybė — gabalų skaičius yra lyginis.

Atlikdami uždavinyje aprašytus žingsnius ir remdamiesi invariantine savybe, mes parodėme, kad:

- šią savybę turi pradinis skaičius;
- ši savybė atliekant nurodytas operacijas išlieka;
- šios savybės norimas galutinis rezultatas neturi.

2 PAVYZDYS

Lentoje iš eilės surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 1998. *Vienu ėjimu leidžiama nutrinti bet kuriuos du šalia esančius skaičius ir jų vietoje užrašyti tų skaičių skirtumą. Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių lentoje lieka tiktai vienas vienintelis skaičius* 0?

Sprendimas. Lentoje užrašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius:
$1+2+3+\cdots+1998 = \frac{(1+1998)\times 1998}{2} = \frac{1999\times 1998}{2} = 1999\times 999.$
Nutrinkime du šalia esančius skaičius 9 ir 10, o jų vietoje įrašykime šių skaičių skirtumą $10 - 9 = 1$ (nelyginį skaičių). Nutrintų skaičių suma yra $10 + 9 = 19$ (nelyginis skaičius). Kadangi skaičių 9 ir 10 vietoje įrašėme 1, tai skaičių suma sumažėjo $19 - 1 = 18$, t. y. lyginiu skaičiumi. Taip galėtume išnagrinėti ir kitas šalia esančių skaičių poras.

Nutrynus du šalia esančius skaičius a ir b, $a > b$, ir jų vietoje užrašius šių skaičių skirtumą $a - b$, lentoje užrašytų skaičių suma

sumažėja $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$, t. y. lyginiu skaičiumi.

Išvada. Visų pradžioje užrašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius, o nutrynus du šalia esančius skaičius ir įrašius jų skirtumą visų skaičių suma sumažėja lyginiu skaičiumi, todėl kiekvieną kartą (iš nelyginio skaičiaus atėmus lyginį) gaunamas nelyginis skaičius. Nulio gauti negalima, nes nulis yra lyginis skaičius.

Ieškoma ėjimų seka neegzistuoja.

Invariantinė savybė — skaičių suma yra *nelyginis skaičius*:

- šią savybę turi pradinė skaičių aibė;
- ši savybė atliekant leistinas operacijas išlieka;
- šios savybės pageidaujamas rezultatas neturi.

Sprendžiant dažną uždavinį, tiesiogiai invarianto rasti nepavyksta, todėl tenka jo ieškoti *dirbtinai*.

3 PAVYZDYS

Monitoriaus ekrane užrašyta raidžių seka XXYXYY. *Raidžių grupę* XY *galima pakeisti grupe* YYXXYY, *o raidžių grupę* YYX *galima pakeisti raide* X. *Ar atliekant šias operacijas galima gauti raidžių seką* YXYXYXYXYXYXYXY?

Sprendimas. Nagrinėkime raidžių X ir Y skaičių skirtumą.

Pradinės sekos šių raidžių skaičių skirtumas lygus nuliui, o norimos gauti sekos jis lygus -1.

Atlikus pirmą galimą keitimą, šis skirtumas sumažėja dviem, o atlikus antrąjį, jis padidėja dviem.

Matome, kad atliekant bet kurį keitimą raidžių Y ir X skaičių skirtumo pokytis yra lyginis skaičius. Kadangi pradinės sekos šių raidžių skaičių skirtumas lygus nuliui, tai jis visada išliks lyginis, o norimos sekos jis nelyginis (-1).

Taigi norimos raidžių sekos gauti negalima.

Invariantinė savybė — ieškomos sekos skirtingų raidžių skaičių skirtumas yra *lyginis* skaičius.

4 PAVYZDYS

Kvadratas sudarytas iš 4 × 4 langelių. Keturi langeliai nudažyti juodai tokia tvarka, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra tik po vieną juodą langelį. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti vieną eilutę arba vieną stulpelį ir pakeisti langelių spalvą priešinga — juodus langelius perdažyti baltai, o baltus — juodai. Ar gali atsitikti taip, kad kvadrate liktų 3 juodi langeliai?

Sprendimas. Susitarkime spręsdami šį uždavinį ir eilutes, ir stulpelius vadinti linijomis.

Tegul kiekvienu ėjimu yra pakeičiama linijos t langelių spalva. Nagrinėkime, kaip darant ėjimus keičiasi skaičius juodų langelių linijoje t ir visame kvadrate.

Išnagrinėkime visus 1 lentelėje parodytus atvejus, ieškodami juodų langelių linijoje t skaičiaus.

Darome išvadą, kad po bet kurio ėjimo juodų langelių kvadrate skaičiaus pokytis yra lyginis. Uždavinio pradžioje buvo 4 juodi langeliai, todėl jų skaičius negali būti lygus 3 (nelyginiam skaičiui).

Taigi kvadrate 3 juodi langeliai likti negali.

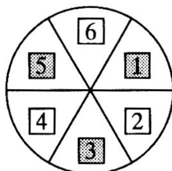
1 lentelė

Prieš ėjimą	Po ėjimo	Pokytis (skirtumas)
4	0	−4
3	1	−2
2	2	0
1	3	+2
0	4	+4

Invariantinė savybė — juodų langelių yra *lyginis* skaičius.

5 PAVYZDYS

Skritulys padalytas į 6 sektorius. Kiekviename sektoriuje yra vokas, į kurį įdėtas 1 litas. Vienu ėjimu leidžiama vieną voką perkelti į kaimyninį sektorių. Ar gali po 20 ėjimų visi pinigai atsidurti tame pačiame sektoriuje?



1 pav.

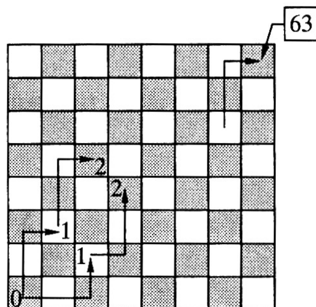
Sprendimas. Pirmiausia visus sektorius sunumeruokime, o 1, 3, 5 sektorius nuspalvinkime. Pinigų suma nuspalvintuose trijuose sektoriuose yra $S = 3\,\text{Lt}$ (1 pav.). Vienu ėjimu leidžiama perkelti vieną voką į kaimyninį sektorių, todėl pinigų suma S nuspalvintuose sektoriuose arba padidėja 1 Lt, arba sumažėja 1 Lt. Po antrojo ėjimo ši suma vėl pasikeičia panašiai — arba sumažėja, arba padidėja 1 litu.

Vadinasi, po lyginio skaičiaus ėjimų pinigų suma S bus nelyginis skaičius. Kadangi 20, t. y. ėjimų skaičius, yra lyginis, tai ši suma S bus nelyginis skaičius. Pagal uždavinio sąlygą visus vokus reikia sukelti į vieną sektorių, todėl turėtų būti $S = 0$ arba $S = 6$, t. y. lyginis skaičius, bet taip būti negali. Atsakymas — ne.

Invariantinė savybė — pinigų suma nuspalvintuose sektoriuose po lyginio skaičiaus ėjimų yra *nelyginis* skaičius.

6 PAVYZDYS

Šachmatų lentos kairiajame apatiniame laukelyje stovi žirgas. Ar gali jis nušokuoti į dešinįjį viršutinį laukelį, kiekviename lentos laukelyje pabuvojęs vieną kartą?



2 pav.

Sprendimas. Iš pradžių šachmatų žirgas stovi juodame laukelyje (2 pav.). Po pirmojo ėjimo jis atsiranda baltame laukelyje, po kito ėjimo jis vėl atsiranda juodame laukelyje. Taigi po kiekvieno ėjimo žirgas nušoka į priešingos spalvos laukelį:
juodas $\rightarrow$ baltas $\rightarrow$ juodas $\rightarrow$ baltas $\rightarrow \cdots$.

Vadinasi, po lyginio skaičiaus ėjimų žirgas bus juodame laukelyje, o po nelyginio skaičiaus ėjimų — baltame laukelyje.

Šachmatų lentoje 8×8 yra 64 laukeliai, bet žirgas viename laukelyje jau stovi, todėl pagal uždavinio sąlygą jis turi atlikti $64 - 1 = 63$ ėjimus. Bet skaičius 63 yra nelyginis, todėl po 63 ėjimų žirgas atsiras baltame laukelyje. Dešinysis viršutinis laukelis yra juodas, todėl žirgas, visuose laukeliuose pabuvojęs lygiai vieną kartą, į jį patekti negali.

Invariantinė savybė — kas du ėjimai žirgas atsiranda juodame laukelyje.

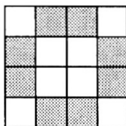
7 PAVYZDYS

Kvadratinė lentelė sudaryta iš 4×4 *langelių. Pirmos eilutės antrame langelyje įrašytas nulis, kituose įrašyti vienetai. Vienu ėjimu leidžiama nulius pakeisti vienetais ir vienetus nuliais vienoje linijoje — arba visuose vieno stulpelio langeliuose, arba visuose vienos eilutės langeliuose, arba visuose lentelės įstrižainės langeliuose. Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visuose langeliuose būtų vienetai?*

(*Lentelės įstrižaine* čia vadiname bet kurią langelių eilę, lygiagrečią (ar sutampančią) su viena iš kvadrato įstrižainių. Lentelės įstrižaine taip pat vadiname kiekvieną kampinį langelį. Taigi mūsų lentelė turi 14 įstrižainių.)

Sprendimas. Nuspalvinkime po 2 kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio langelius, kaip tat parodyta 3 paveiksle.

Darykime ėjimą ir žiūrėkime, kas vyks nuspalvintuose langeliuose. Atlikę keletą bandymų, matome, kad pokyčiai įvyksta arba dviejuose nuspalvintuose langeliuose, arba nė viename nuspalvintame langelyje (nes kai kuriose įstrižainėse nėra nė vieno nuspalvinto langelio).



3 pav.

Išnagrinėkime, kaip keičiasi nulių skaičius nuspalvintoje lentelės srityje atliekant ėjimą (kai linijoje yra 2 nuspalvinti langeliai):

a) jei abiejuose nuspalvintuose linijos langeliuose buvo vienetai, tai po skaitmenų pasikeitimo juose bus nuliai ir nulių skaičius lentelės nuspalvintoje srityje padidės dviem;

b) jei abiejuose nuspalvintuose linijos langeliuose buvo nuliai, tai po skaitmenų pasikeitimo juose bus vienetai ir nulių skaičius lentelės nuspalvintoje srityje sumažės dviem;

c) jei viename nuspalvintame linijos langelyje buvo vienetas, o kitame — nulis, tai lentelės nuspalvintoje srityje nulių skaičius nesikeis.

Išvada. Nulių skaičius nuspalvintoje srityje arba nesikeičia, arba keičiasi (padidėja arba sumažėja) 2, t. y. lyginiu skaičiumi. Iš pradžių nuspalvintuose langeliuose buvo vienas nulis, t. y. nelyginis skaičius, todėl nulių skaičius niekada negali pasidaryti lygus nuliui.

Taigi norima ėjimų seka neegzistuoja.

Invariantinė savybė — nuspalvintoje srityje nulių yra *nelyginis* skaičius.

UŽDAVINIAI

1. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 10. Vienu ėjimu leidžiama išsirinkti bet kuriuos du iš jų ir prie abiejų pridėti po vienetą. Ar po kelių ėjimų galima pasiekti, kad visi skaičiai taptų vienodi?

2. Lentoje surašyti skaičiai 0, 1, 0, 0. Vienu ėjimu leidžiama prie bet kurių dviejų skaičių pridėti po vienetą. Ar po kelių ėjimų galima pasiekti, kad visi skaičiai būtų vienodi?

3. Lentoje surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 1993. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du skaičius ir vietoje jų užrašyti šių skaičių skirtumo

modulį. Galiausiai lentoje lieka tik vienas vienintelis skaičius. Ar šis skaičius gali būti lygus nuliui?

4. Lentoje surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 1998. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du skaičius ir vietoje jų užrašyti šių skaičių skirtumą. Akivaizdu, kad po 1997 tokių ėjimų lentoje lieka vienas skaičius. Įrodykite, kad šis skaičius yra nelyginis.

5. Ant stalo stovi 16 ritinių, kurių vienas pagrindas nudažytas raudonai, o kitas — mėlynai. Iš jų 15 ritinių stovi raudonu pagrindu į viršų, o vienas ritinys — mėlynu pagrindu į viršų. Vienu ėjimu leidžiama apversti atvirkščiai bet kuriuos 4 ritinius. Ar po kelių ėjimų galima apversti visus ritinius raudonu pagrindu į viršų?

6. Iš eilės viena šalia kitos sudėtos 1998 monetos. Pirmoji iš jų padėta skaičiumi į viršų, likusios — herbu į viršų. Vienu ėjimu leidžiama apversti bet kurias tris šalia esančias monetas. Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visos monetos būtų padėtos herbu į viršų?

7. Ratu surašyti skaičiai, iš kurių 1 yra vienetas, o kiti — nuliai. Vienu ėjimu leidžiama išsirinkti 3 paeiliui užrašytus skaičius, iš kurių vidurinis yra vienetas, ir juos visus pakeisti: vienetą — nuliu, o nulius — vienetais. Kartojant šiuos ėjimus, reikia pasiekti, kad rate būtų tiktai nuliai. Ar tai galima atlikti, jei iš pradžių yra 1995 skaičiai?

8. Yra miesto žemėlapis su 1996 lemputėmis. Kiekviena lemputė turi atskirą jungiklį. Vienu metu galima keisti bet kurių 26 lempučių jungiklio padėtį. Iš pradžių yra uždegta 17 lempučių. Ar galima užgesinti visas lemputes?

9. Profesorius Saldūnas stebuklų laboratorijoje pasigamino 1997 čiulpinukus. Jis užsigeidė išsivežti juos namo, bet tai galima padaryti tik sudėjus saldainius į dėžutes — į kiekvieną lygiai po 96 saldainius. Negana to: jeigu jis į dėžutę įsideda kažkiek čiulpinukų, tai laboratorijoje stebuklingai atsiranda dar tiek pat „Karvučių“, o jeigu įsideda kiek nors „Karvučių“, tai laboratorijoje atsiranda tiek pat čiulpinukų. Profesorius labai mėgsta čiulpinukus ir planuoja baigti darbą tik tada, kai susikraus visus čiulpinukus. Kaip greitai jam tai pavyks?

10. Šokių grupėje „Želsvelė“ yra 7 berniukai ir 11 mergaičių. Naujam šokiui repetuoti reikia 10 berniukų ir 15 mergaičių. Šokių grupė

„Venera“ gali keistis šokėjais su „Želsvele“, paskolindama 8 mergaites ir už jas paimdama 4 berniukus, o šokių grupė „Marsas“ — paskolindama 3 berniukus ir paimdama 5 mergaites. Abi šios grupės tokius mainus gali daryti kelis kartus. Ar pavyks „Želsvelei“ sumanytą šokį surepetuoti? (Atliekamų šokėjų „Želsvelėje“ neturi būti.)

11. Monitoriaus ekrane pavaizduota seka: VOVOVOV. Raidžių grupę VO galima pakeisti raidžių grupe OVVOVOO ir atvirkščiai, o raidžių grupę OO galima nutrinti nekeičiant į nieką. Ar atlikus šias operacijas keletą kartų galima gauti raidžių grupę VOVOV?

12. Natūralųjį skaičių kas minutę galima arba dauginti, arba dalyti iš 2 ar iš 3. Ar po 60 minučių skaičius 24 gali būti pavirtęs skaičiumi 108?

13. Taisyklingojo šešiakampio viršūnėse paeiliui užrašyti skaičiai 7, 5, 3, 7, 1, 9. Vienu ėjimu leidžiama:

1) prie bet kurio skaičiaus pridėti du skaičius, esančius gretimose viršūnėse;
2) iš skaičiaus atimti dvigubą priešingoje viršūnėje užrašytą skaičių, jei skirtumas yra teigiamas.

Ar egzistuoja serija tokių ėjimų, po kurių vienoje iš viršūnių būtų įrašytas skaičius 1996?

14. Skritulys padalytas į 14 lygių sektorių ir į keturis šalia esančius sektorius iš eilės padėtos 1, 2, 5 ir 10 centų monetos. Vienu ėjimu leidžiama perkelti bet kurią monetų porą per tris sektorius. Po kelių tokių ėjimų monetų grupė užims tuos pačius keturis sektorius? Ar galėjo atsitikti taip, kad 1 ct ir 2 ct monetos susikeitė vietomis?

15. a) Taisyklingojo 12-kampio $A_1A_2A_3...A_{12}$ viršūnėje A_1 yra ženklas „ $-$ “, o likusiose viršūnėse yra ženklai „ $+$ “. Vienu ėjimu leidžiama keisti ženklą priešingu šešiose iš eilės 12-kampio viršūnėse. Įrodykite, kad po keleto tokių operacijų negali atsitikti taip, kad viršūnėje A_2 būtų ženklas „ $-$ “, o visose likusiose viršūnėse — ženklas „ $+$ “.

b) Įrodykite tą patį, jei vienu ėjimu ženklas keičiamas keturiose iš eilės viršūnėse.

c) Įrodykite tą patį, jei vienu ėjimu ženklas keičiamas trijose iš eilės viršūnėse.

16. Kvadratinė lentelė sudaryta iš 4×4 langelių, ir į kiekvieną langelį įrašytas ženklas „+“ arba „–“ (4 pav.). Vienu ėjimu leidžiama keisti ženklus visuose langeliuose, esančiuose vienoje eilutėje, viename stulpelyje arba vienoje įstrižainėje (įstrižainė apibrėžiama taip pat kaip 7 pavyzdyje). Įrodykite, kad, nors ir kiek tokių keitimų atliktume, nepavyks gauti lentelės, kurioje būtų tiktai ženklai „+“.

+	+	+	+
+	+	+	+
–	+	+	+
+	+	+	+

4 pav.

17. Kvadratinė lentelė sudaryta iš 8×8 langelių. Kiekviename iš jų įrašytas ženklas „+“ arba „–“. Vienu ėjimu leidžiama keisti ženklus arba visuose eilutės langeliuose, arba visuose stulpelio langeliuose, arba visuose vienos įstrižainės langeliuose (įstrižainė apibrėžiama taip pat kaip 7 pavyzdyje). Kaip iš pradžių įrašyti ženklus langeliuose, kad po bet kurio skaičiaus ėjimų būtų ne mažiau kaip 6 langeliai, kuriuose yra įrašytas ženklas „–“?

18. Lentoje, kurios matmenys yra 9×9, sustatyti 54 kauliukai, kaip parodyta 5 paveiksle. Jei du kauliukai A ir B yra šalia vienoje eilutėje arba viename stulpelyje ir už B yra laisvas laukelis, tai kauliuką A galima perkelti per kauliuką B į šį laisvą laukelį, o kauliuką B nuimti nuo lentos, t. y. kauliuku A nukirsti kauliuką B. Bet koks kitas kauliukų perkėlimas negalimas. Ar galima pasiekti, kad lentoje liktų tiktai vienas kauliukas?

o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o

5 pav.

1.2. BŪDINGOS LIEKANŲ REIKŠMĖS

1.2.1. Dalumas iš 3

Dažnai invariantine savybe renkamės ne teiginį „yra lyginis skaičius“ arba „yra nelyginis skaičius“, bet teiginį „dalijasi iš 3“ arba „dalijant iš 3 gaunama liekana 1 (arba 2)“.

Panagrinėkime keletą uždavinių, kuriems spręsti taikoma savybė „dalijasi (arba nesidalija) iš 3“.

8 PAVYZDYS

Miške auga 36 *grybai. Pirmos dienos ryte vienas grybas nuvirto, bet išaugo* 4 *nauji. Taip atsitinka kiekvieną kitą dieną — vienas nuvirsta,* 4 *išauga. Kurią dieną šiame miške bus* 15 037 *grybai?*

Sprendimas. Nustatykime, koks yra vienos dienos grybų skaičiaus miške pokytis. Jei miške išauga 4 nauji grybai ir 1 nugriūva, tai grybų skaičius miške padidėja trimis, nes $4 - 1 = 3$. Taip vyksta kiekvieną dieną. Pradinis grybų skaičius dalijasi iš 3, taigi jis dalijasi iš 3 visą laiką. Norėdami nustatyti, ar kada nors miške bus 15 037 grybai, tikriname, ar skaičius 15 037 dalijasi iš 3. Bet šis skaičius nesidalija iš 3 be liekanos, todėl nebus tokios dienos, kad miške būtų 15 037 grybai.

Invariantinė savybė — grybų skaičius dalijasi iš 3.

9 PAVYZDYS

Slibinas turi 2000 *galvų. Riteris vienu kirčiu slibinui gali nukirsti* 33, 21, 17 *arba* 1 *galvą, bet tuoj pat slibinui atauga atitinkamai* 48, 0, 14 *arba* 349 *galvos. Nukirtus visas galvas, naujos nebeatauga. Ar riteris galės įveikti slibiną?*

Sprendimas. Riteris nugalėtų slibiną, jei nukirstų visas galvas. Panagrinėkime, kaip po kiekvienokio kirčio pasikeičia slibino galvų skaičius.

Po vienokio kirčio — nukirtus 33 galvas, 48 galvos atauga ir slibino galvų skaičius padidėja 15 ($48 - 33 = 15$), t. y. skaičiumi, kuris dalijasi iš 3.

Po antrokio kirčio — nukirtus 21 galvą, 0 galvų atauga ir slibino galvų skaičius sumažėja 21, t. y. skaičiumi, kuris dalijasi iš 3.

Po trečiokio kirčio — nukirtus 17 galvų, 14 galvų atauga ir slibino galvų skaičius sumažėja 3 ($17 - 14 = 3$), t. y. skaičiumi, kuris dalijasi iš 3.

Po ketvirtokio kirčio — nukirtus 1 galvą, 349 galvos atauga ir jų skaičius padidėja 348 ($349 - 1 = 348$), t. y. skaičiumi, kuris dalijasi iš 3.

Iš pradžių slibinas turi 2000 galvų, t. y. jų skaičius nesidalija iš 3, todėl nukirtus dalį slibino galvų jų skaičius vėl gaunamas toks, kuris nesidalija iš 3. Taigi jis niekada nesidalys iš 3. Vadinasi, galvų skaičius niekada nebus lygus nuliui.

Invariantinė savybė — slibino galvų skaičius nesidalija iš 3.

10 PAVYZDYS

Saloje gyvena 13 *baltų*, 15 *raudonų ir* 17 *žalių chameleonų* (*driežų, kurie keičia spalvą*). *Chameleonai susitinka tiktai po du. Susitikę du vienos spalvos chameleonai spalvos nekeičia*; *susitikę du skirtingų spalvų chameleonai iš karto abu įgyja trečią spalvą* (*pavyzdžiui, susitikę baltas ir raudonas chameleonai abu tampa žali ir t. t.*). *Ar gali atsitikti taip, kad visi chameleonai vienu metu taptų vienos spalvos*?

Sprendimas. Nagrinėkime, kaip gali keistis skaičius skirtingų spalvų chameleonų po jų susitikimų.

Baltą chameleoną pažymėkime raide B, raudoną — R, žalią — Ž. Iš 2 lentelės matome, kad niekaip nepavyksta sulyginti dviejų spalvų chameleonų skaičiaus. Jei tai pavyktų, tai gal būt būtų nesunku visus chameleonus padaryti vienos spalvos.

Įrodysime, kad situacija, jog visi 45 chameleonai būtų vienos spalvos, negalima.

Ištirsime, kaip po vieno susitikimo pasikeičia kiekvienos spalvos chameleonų skaičius. Susitikus dviem vienos spalvos chameleonams, jų spalva nesikeičia. Taip pat nesikeičia ir chameleonų kiekvienoje spalvų grupėje skaičius.

Skirtingų spalvų chameleonai gali susitikti: a) baltas su raudonu; b) baltas su žaliu; c) raudonas su žaliu.

2 lentelė

Chameleonų skaičius	B	R	Ž
Pradinis	13	15	17
Po R ir Ž susitikimo	$13 + 2 = 15$	$15 - 1 = 14$	$17 - 1 = 16$
po B ir Ž susitikimo	$15 - 1 = 14$	$14 + 2 = 16$	$16 - 1 = 15$
po R ir Ž susitikimo	$14 + 2 = 16$	$16 - 1 = 15$	$15 - 1 = 14$
po R ir Ž susitikimo	$16 + 2 = 18$	$15 - 1 = 14$	$14 - 1 = 13$
po R ir Ž susitikimo	$18 + 2 = 20$	$14 - 1 = 13$	$13 - 1 = 12$
po B ir R susitikimo	$20 - 1 = 19$	$13 - 1 = 12$	$12 + 2 = 14$
po B ir R susitikimo	$19 - 1 = 18$	$12 - 1 = 11$	$14 + 2 = 16$
po B ir Ž susitikimo	$18 - 1 = 17$	$11 + 2 = 13$	$16 - 1 = 15$
po B ir Ž susitikimo	$17 - 1 = 16$	$13 + 2 = 15$	$15 - 1 = 14$

Tada chameleonų kiekvienoje grupėje skaičius po pirmojo susitikimo šiais atvejais gali pasikeisti taip, kaip parodyta 3, 4 ir 5 lentelėse.

3 lentelė

Chameleonų skaičius	B	R	Ž
Pradinis	13	15	17
Po pirmojo susitikimo	$12 = 13 - 1$	$14 = 15 - 1$	$19 = 17 + 2$

4 lentelė

Chameleonų skaičius	B	R	Ž
Pradinis	13	15	17
Po pirmojo susitikimo	$12 = 13 - 1$	$17 = 15 + 2$	$16 = 17 - 1$

5 lentelė

Chameleonų skaičius	B	R	Ž
Pradinis	13	15	17
Po pirmojo susitikimo	$15 = 13 + 2$	$14 = 15 - 1$	$16 = 17 - 1$

Skaičius 13, 15, 17 dalijant iš 3, gaunamos liekanos atitinkamai 1, 0, 2. Nagrinėkime, kokios yra nurodytais atvejais chameleonų skirtingose spalvų grupėse skaičių liekanos po pirmojo susitikimo (6, 7 ir 8 lentelės).

6 lentelė

Liekana dalijant iš 3	B	R	Ž
Pradinio skaičiaus	1	0	2
Po pirmojo susitikimo	0	2	1

7 lentelė

Liekana dalijant iš 3	B	R	Ž
Pradinio skaičiaus	1	0	2
Po pirmojo susitikimo	0	2	1

8 lentelė

Liekana dalijant iš 3	B	R	Ž
Pradinio skaičiaus	1	0	2
Po pirmojo susitikimo	0	2	1

Pastebėkime, kad visais 3 atvejais po pirmojo susitikimo gaunamos visos galimos dalybos iš 3 liekanos. Jos yra tokios pat, kaip ir pradinio skaičiaus, tik išsidėsčiusios kita tvarka. Panagrinėjus lenteles po 2, 3 ar daugiau susitikimų, vėl gaunamos liekanos 1, 0, 2, tiktai kita tvarka.

Pagrįsime tai. Iš lygybių

$$\begin{aligned}(3a+0)-1&=3(a-1)+2,\\ (3a+1)-1&=3a+0,\\ (3a+2)-1&=3a+1\end{aligned}\qquad(1)$$

matome, kad iš skaičiaus, kurio liekana padalijus jį iš 3 yra lygi 0 (atitinkamai 1 arba 2), atėmus vienetą gaunamas skaičius, kurio liekana padalijus jį iš 3 yra lygi 2 (atitinkamai 0 arba 1).

Taip pat iš lygybių

$$\begin{aligned}(3a+0)+2&=3a+2,\\(3a+1)+2&=3(a+1)+0,\\(3a+2)+2&=3(a+1)+1\end{aligned}\tag{2}$$

matome, kad prie skaičiaus, kurio liekana padalijus jį iš 3 yra lygi 0 (atitinkamai 1 arba 2), pridėjus 2, gaunamas skaičius, kurio liekana padalijus jį iš 3 yra lygi 2 (atitinkamai 0 arba 1).

Iš tikrųjų, susitikus „nulinės liekanos“ spalvos chameleonams su „vienetinės liekanos“ spalvos chameleonais, remiantis (1) lygybėmis, jų spalva keičiasi atitinkamai į „dvejeto liekanos“ spalvą ir „nulinės liekanos“ spalvą. Savo ruožtu trečioji, t. y. „dvejeto liekanos“, spalva pagal (2) lygybes virsta „vienetinės liekanos“ spalva. Tuomet vėl gaunamos visos trys liekanos.

Taip pat nagrinėjami kiti du susitikimų atvejai.

Jei visi chameleonai taptų vienos spalvos, tai jų pasiskirstymas spalvomis būtų 45, 0, 0. Šių skaičių liekanos, dalijant juos iš 3, būtų vienodos. Taigi nėra galima, kad saloje visi chameleonai būtų vienos spalvos.

Invariantinė savybė — skirtingų spalvų chameleonų skaičius dalijant iš 3 gaunamos skirtingos liekanos.

11 PAVYZDYS

Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti tokias operacijas:

a) *dauginti iš* 2;

b) *dalyti iš* 2, *jei skaičius yra lyginis*;

c) *prirašyti gale tą patį skaičių* (*pavyzdžiui, šia operacija iš skaičiaus* 1997 *galima gauti skaičių* 1997 1997).

Ar atliekant šias operacijas kelis kartus iš skaičiaus 24 *galima gauti skaičių* 1997?

Sprendimas. Pirmiausia ištirkime abu skaičius: duotąjį ir tą, kurį reikia gauti. Skaičius 24 dalijasi iš 3, o skaičius 1997 nesidalija.

Smulkiau panagrinėkime, ar operacijos nekeičia dalumo iš 3. Įrodysime: jei koks nors skaičius dalijasi iš 3, tai skaičius, gautas uždavinyje nurodytomis operacijomis, taip pat turi dalytis iš 3. Iš tiesų:

a) jei n dalijasi iš 3, tai ir $2n$ dalijasi iš 3;

b) jei lyginis skaičius $2n$ dalijasi iš 3, tai n dalijasi iš 3;

c) išvados apie trečiąją operaciją gaunamos remiantis dalumo požymiu iš 3. Jei skaičiaus $\overline{n}$ skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai ir naujai gauto skaičiaus $\overline{nn}$ skaitmenų suma dalijasi iš 3, nes ji yra du kartus didesnė už pradinio skaičiaus $\overline{n}$ skaitmenų sumą. Tuomet ir pats naujai gautas skaičius $\overline{nn}$ dalijasi iš 3.

Skaičius 24 dalijasi iš 3, todėl ir skaičiai, kuriuos galima gauti iš 24, turi dalytis iš 3. Bet skaičius 1997 iš 3 nesidalija, todėl uždavinyje nurodytomis operacijomis skaičiaus 1997 negalima gauti.



Invariantinė savybė — visi gaunami skaičiai dalijasi iš 3.

12 PAVYZDYS

Lentoje yra užrašyti skaitmenys 2, 3, 4, 5. *Leidžiama pasirinkti bet kuriuos iš jų ir sudaryti skaičių* A. *Po to skaičius* A *dauginamas iš* 13 *ir gaunamos sandaugos skaitmenys užrašomi lentoje pasirinktųjų skaitmenų vietoje.* (*Pavyzdžiui, pasirinkus skaitmenis* 2, 3, 4, *galima iš jų sudaryti skaičių* $A = 324$ *ir gauti* $13A = 13 \times 324 = 4212$. *Be to, skaitmuo* 2 *yra gautas du kartus. Tuomet lentoje užrašoma* 1, 2, 2, 4, 5.) *Ar naudojantis šiomis operacijomis galima lentoje gauti skaitmenis* 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7?

Sprendimas. Prisiminkime, kad natūralųjį skaičių dalijant iš 3 gaunama tokia pat liekana, kaip ir šio skaičiaus skaitmenų sumą dalijant iš 3.

Jei pasirinktų skaitmenų sumą dalijant iš 3 gaunama liekana r, tai tokia pat liekana r gaunama ir iš šių skaitmenų sudarytą skaičių A dalijant iš 3. Kadangi $13A = A + 12A$ ir $12A$ dalijasi iš 3, tai tokia pat liekana r bus ir naujai gautą skaičių $13A$ padalijus iš 3. Tada tokia pat liekana r bus ir dalijant iš 3 sumą skaitmenų, kurie atlikus operaciją užrašomi pasirinktų skaitmenų vietoje.

Taigi lentoje užrašytų skaitmenų sumos, dalijamos iš 3, liekana po operacijos nepasikeičia.

Pastebėkime, kad iš pradžių užrašytų skaitmenų suma lygi 14. Padalijus iš 3, gaunama liekana 2. Todėl visada lentoje esančių skaitmenų sumą dalijant iš 3 liekana lygi 2.

Norimos aibės skaitmenų suma lygi $2 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 2 \times 27 = 54$. Padalijus ją iš 3, gaunama liekana 0.

Taigi šios skaitmenų aibės gauti negalima.

Invariantinė savybė — lentoje esančių skaitmenų sumą dalijant iš 3 gaunama liekana 2.

UŽDAVINIAI

19. Jonas turi 15 etikečių. Pirmą savaitę jis mokykloje kiekvieną dieną iškeičia 1 etiketę į 4 etiketes. Taip jis daro ir kitomis savaitėmis. Savaitėje yra 5 mokymosi dienos. Kurios dienos vakare Jonas turės lygiai 113 etikečių?

20. Lentoje 10×10 stovi figūra „liūtas“, kuri gali daryti ėjimą arba per vieną langelį į dešinę arba per vieną langelį aukštyn, arba per vieną langelį įstrižaine į kairę pusę žemyn. Ar liūtas gali apeiti visus langelius, kiekviename pabuvodamas tik vieną kartą, ir paskutiniu ėjimu sugrįžti į pradinį langelį?

21. Ar iš figūrų eilutės ○□○□○□ galima gauti eilutę ○○□○□○□○, jei grupę ○□○ galima pakeisti grupe ○○□○□○○○, o grupę ○□○□○○○□○ galima pakeisti grupe ○□□○□○?

22. Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti tokias operacijas:

1) pridėti 6;

2) dalyti iš 2, jei skaičius yra lyginis;

3) keisti vietomis skaičiaus skaitmenis (skaičiaus pradžioje negali atsirasti nulis).

Ar šias operacijas atliekant kelis kartus iš skaičiaus 21 galima gauti skaičių 3001?

1.2.2. Dalumas iš 4

Nagrinėkime uždavinius, kuriuose invariantinė savybė susijusi su dalijimu iš 4.

13 PAVYZDYS

Ar 19 990 *metais vyks olimpinės žaidynės*?

Sprendimas. Olimpinės žaidynės vyksta kas ketveri metai. Pavyzdžiui, jos vyko 1996 metais. Kadangi 1996 dalijasi iš 4, tai olimpinės žaidynės vyks metais, kurie dalijasi iš 4. Bet $19\,990 = 20\,000 - 10$ iš 4 nesidalija, todėl tais metais olimpinės žaidynės nevyks.

Invariantinė savybė — olimpinių žaidynių metų skaičius dalijasi iš 4.

14 PAVYZDYS

Skaičių seka $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *sudaryta taip*:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ \ldots,\ b_{n+2} = b_n b_{n+1} + 1;$$

čia $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*t. y. kiekvienas sekos narys gaunamas prie abiejų prieš tai esančių narių sandaugos pridėjus vienetą*). *Įrodykite, kad* b_{1996} *nesidalija iš* 4.

Sprendimas. Nustatykime, kokias gauname liekanas, sekos b_1, b_2, $\ldots$, b_n narius dalydami iš 4. Liekaną, gaunamą b_n dalijant iš 4, pažymėkime r_n. Kadangi $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 7$ ir t. t., tai $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 3$ ir t. t.
Pirmiausia įrodysime tokį teiginį.

LEMA. *Reikšmė* r_{n+2} *yra lygi liekanai, kuri gaunama skaičių* $r_{n+1} \times r_n + 1$ *dalijant iš* 4.

Įrodymas. Kiekvieną sekos (b_n) narį dalijame iš 4 su liekana ir gauname:

$$b_n = 4M_n + r_n,$$
$$b_{n+1} = 4M_{n+1} + r_{n+1}.$$

Kiekvienas uždavinyje nurodytos sekos (b_n) narys yra užrašomas

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= b_n \times b_{n+1} + 1 = (4M_n + r_n) \times (4M_{n+1} + r_{n+1}) + 1 = \\ &= 16M_n M_{n+1} + 4M_n r_{n+1} + 4M_{n+1} r_n + r_n \times r_{n+1} + 1 = \\ &= 4(4M_n M_{n+1} + M_n r_{n+1} + M_{n+1} r_n) + (r_n \times r_{n+1} + 1). \end{aligned}$$

Pirmasis dėmuo dalijasi iš 4. Vadinasi, dalijant b_{n+2} iš 4 liekana priklauso nuo dėmens $(r_n \times r_{n+1} + 1)$. Lema įrodyta.

Taigi liekanos r_{n+2} reikšmė priklauso nuo liekanų r_{n+1} ir r_n reikšmių, t. y. nuo abiejų prieš tai buvusių liekanų.

Sudarykime reikšmių $b_{n+2} = b_n \times b_{n+1} + 1$, kai $1 \leqslant n \leqslant 7$, lentelę.

9 lentelė

n	1	2	3	4	5	6	7
(b_n)	1	2	3	7	22	155	3411
(r_n)	1	2	3	3	2	3	3

Matome, kad joje liekanų pora (2; 3) pasikartojo. Kadangi kiekviena būsima liekana priklauso tiktai nuo dviejų prieš tai buvusiųjų, tai ir jos kartosis, todėl galima daryti išvadą, kad liekanų seka (r_n) yra periodinė su periodu (2; 3; 3).

Nė vienas sekos (r_n) narys nesidalija iš 4, todėl ir sekos (b_n) nė vienas narys nesidalija iš 4, taigi ir narys b_{1996} nesidalija iš 4.

Invariantinė savybė — nė vienas sekos (b_n) narys nesidalija iš 4.

UŽDAVINIAI

23. Šachmatų lenta sudaryta iš 8×8 laukelių. Viename laukelyje įrašytas ženklas „ – “, o visuose likusiuose — ženklas „ + “. Vienu ėjimu leidžiama keisti ženklus priešingais visuose vienos eilutės laukeliuose arba visuose vieno stulpelio laukeliuose. Ar egzistuoja seka ėjimų, po kurių visuose laukeliuose būtų ženklas „ + “?

24. Didelio languoto popieriaus lapo, kurio langelių matmenys yra 1 dm × 1 dm, vieno langelio trijose viršūnėse tupi 3 žiogai. Jie žaisdami šokinėja vienas per kitą. Jei žiogas iš taško A šoka per žiogą

taške B, tai po šuolio jis atsiduria taške, simetriškame taškui A taško B atžvilgiu. Ar kuris nors žiogas gali patekti į pradinio langelio ketvirtąją viršūnę?

25. Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti šias operacijas: pridėti prie skaičiaus jo skaitmenų sumą arba ją iš jo atimti. Ar atliekant tik šias operacijas iš skaičiaus 41 galima gauti skaičių 91?

26. Ratu susodinti 44 medžiai, kuriuose tupi 44 paukščiai — kiekviename medyje po vieną. Kartas nuo karto 2 paukščiai vienu metu perskrenda į gretimus medžius priešinga kryptimi (vienas — laikrodžio rodyklės kryptimi, kitas — priešinga). Ar visi paukščiai gali vienu metu patekti į vieną medį?

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Visų duotųjų skaičių suma yra nelyginis skaičius:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 5 \times 11 = 55.$$

Kiekvienu ėjimu prie dviejų skaičių pridėjus po vienetą, jų suma padidėja 2 vienetais, taigi ir visų skaičių suma padidėja 2 vienetais, t. y. lyginiu skaičiumi.

Prie pradinės skaičių sumos, t. y. nelyginio skaičiaus, pridėjus 2 (lyginį skaičių), gaunamas nelyginis skaičius.

Norima gauti 10 vienodų skaičių, todėl suma turėtų pasidaryti lyginis skaičius, bet taip negali būti. Taigi negalima pasiekti, kad visi skaičiai pasidarytų vienodi.

Invariantinė savybė — skaičių suma yra nelyginis skaičius.

2. Paėmus bet kuriuos du skaičius ir atlikus šią operaciją, visų užrašytų skaičių suma padidėja dviem. Kadangi iš pradžių skaičių suma yra lygi 1, tai visų skaičių suma visada liks nelyginis skaičius.

Kadangi keturių vienodų skaičių suma yra lyginis skaičius, tai neįmanoma pasiekti, kad visi skaičiai taptų vienodi.

Invariantinė savybė — skaičių suma yra nelyginis skaičius.

3. Visų lentoje surašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 1993 = \frac{1994 \times 1993}{2} = 997 \times 1993.$$

Įrodysime, kad nutrynus bet kuriuos du skaičius ir jų vietoje užrašius šių skaičių skirtumą, užrašytų skaičių suma sumažėja lyginiu skaičiumi.

Iš tikrųjų, du skaičius a ir b pakeitus vienu skaičiumi $|a - b|$, visų skaičių suma pasikeičia skaičiumi $a + b - |a - b| = 2b + [(a - b) + |a - b|]$, kurio abu dėmenys lyginiai. Taigi paskutinis likęs skaičius negali būti lygus 0.

Invariantinė savybė — skaičių suma yra nelyginis skaičius.

4. Lentoje užrašyti 999 lyginiai ir 999 nelyginiai skaičiai. Nutrinant bet kuriuos du skaičius, galimi du atvejai:

a) jei abu skaičiai yra to paties lyginumo, tai jų skirtumas taip pat yra lyginis skaičius, t. y. nutrynus du lyginius skaičius jų vietoje įrašomas lyginis skaičius; nutrynus du nelyginius skaičius, jų vietoje įrašomas lyginis skaičius. Tada nelyginių skaičių sumažėja dviem, taigi jų skaičiaus lyginumas nesikeičia;

b) jei du skaičiai yra skirtingo lyginumo, tai šių skaičių skirtumas yra nelyginis skaičius, t. y. nutrynus du skirtingo lyginumo skaičius, jų vietoje įrašomas nelyginis skaičius, tuomet nelyginių skaičių skaičiaus lyginumas nesikeičia.

Taigi po kiekvienos operacijos nelyginių skaičių lieka tiek pat arba jų skaičius sumažėja dviem.

Iš pradžių lentoje užrašyti 999 nelyginiai skaičiai. Po kiekvienos operacijos lentoje lieka nelyginis skaičius nelyginių skaičių, taigi galiausiai lentoje liks vienas nelyginis skaičius.

Invariantinė savybė — nelyginių skaičių yra nelyginis skaičius.

5. Sakykime, kad teisingai yra sustatyti tie ritiniai, kurių viršutiniai pagrindai yra raudoni, o neteisingai — tie, kurių viršutiniai pagrindai mėlyni.

Nagrinėsime ritinių išsidėstymą po bet kurio ėjimo:

a) jei iš pradžių visi keturi ritiniai sustatyti teisingai, tai teisingai stovinčių ritinių skaičius sumažėja keturiais;

b) jei teisingai stovėjo trys ritiniai, tai apvertus teisingai stovinčių ritinių skaičius sumažėja dviem ($3 - 1 = 2$);

c) jei teisingai stovėjo du ritiniai, tai apvertus teisingai stovinčių ritinių skaičius nesikeičia, nes $2 - 2 = 0$;

d) jei teisingai stovėjo vienas ritinys, tai apvertus teisingai stovinčių ritinių skaičius padidėja dviem, t. y. teisingai stovėjo vienas, o apvertus teisingai stovės trys, taigi teisingai stovinčių ritinių skaičius padidėja dviem ($3 - 1 = 2$);

e) jei teisingai nestovėjo nė vienas ritinys, tai apvertus teisingai stovinčių ritinių skaičius padidėja keturiais.

Pastebime, kad teisingai stovinčių ritinių skaičius po kiekvieno ėjimo arba lieka toks, koks buvo, arba pasikeičia lyginiu skaičiumi.

Kadangi iš pradžių teisingai yra sustatyta 15 ritinių, tai po kiekvieno ėjimo teisingai sustatytų ritinių bus nelyginis skaičius.

Taigi negalėsime pasiekti, kad visi 16 ritinių būtų sustatyti teisingai.

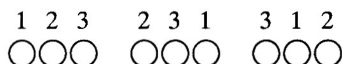
Invariantinė savybė — teisingai sustatytų ritinių skaičius yra nelyginis.

6. Kiekvienai monetai iš eilės priskirkime „svorį“: pirmajai — 1, antrajai — 2, trečiajai — 3, ketvirtajai — 1, penktajai — 2 ir t. t.

Pažymėkime:

□ — monetas, kurios yra skaičiumi į viršų;
○ — monetas, kurios yra herbu į viršų;
S — tų monetų, kurios yra skaičiumi į viršų, svorių sumą.

Panagrinėkime, kaip keičiasi S reikšmė, apvertus tris greta esančias monetas.



6 pav.

Bet kurių trijų vienu ėjimu apverčiamų monetų svorių suma yra lygi 6 (6 pav.). Jei apverstos 3 monetos ir, be to, iš pradžių skaičiumi į viršų atverstų monetų svorių suma yra a, tai po ėjimo skaičiumi į viršų atverstų monetų svorių suma yra $6 - a$. Tada po šio ėjimo suma S keičiasi $a - (6 - a) = 2a - 6$, t. y. lyginiu skaičiumi.

Iš pradžių $S = 1$, todėl S visada lieka nelyginis skaičius. Taigi negali pasidaryti $S = 0$, t. y. atsitikti taip, kad visos monetos būtų herbu į viršų.

Invariantinė savybė — skaičiumi į viršų atverstų monetų „svoris“ yra nelyginis skaičius.

7. Skaičių pozicijas nuspalvinkime paeiliui: baltai, raudonai, žaliai; baltai, raudonai, žaliai ir t. t. Kiekviena spalva bus nuspalvintos 665 pozicijos, nes 1995 : 3 = 665. Po kiekvieno ėjimo keičiasi raudonų, baltų ir žalių vienetų skaičiaus lyginumas, nes kiekvienas ėjimas turi įtakos tik vienai kiekvienos spalvos pozicijai.

Tarkime, iš pradžių vienintelis vienetas yra raudonas. Tada raudonų vienetų skaičiaus (lygaus 1) lyginumas skiriasi nuo baltų vienetų

skaičiaus (lygaus 0) lyginumo. Kadangi jie keičiasi vienu metu, tai negali pasidaryti vienodi. O jeigu vienetai visiškai dingtų, tai ir raudonų, ir baltų vienetų būtų tiek pat — po nulį.

✅ Invariantinė savybė — raudonų ir baltų vienetų skaičiai yra skirtingo lyginumo.

8. Galima keisti bet kurių 26 lempučių jungiklio padėtį, t. y. kai kurias iš jų įjungti, o kai kurias — išjungti.

Kuriuo nors ėjimu įjungiamų lempučių skaičių pažymėkime x. Tada išjungiamų lempučių skaičius bus $26 - x$, o bendras degančių lempučių skaičius pakis $x - (26 - x) = 2x - 26$, t. y. lyginiu skaičiumi.

Degančių lempučių iš pradžių yra 17 — nelyginis skaičius, todėl jis visą laiką ir lieka nelyginis.

Jeigu visos lemputės nebedegtų, tai degančių lempučių skaičius būtų lygus 0, o tai neįmanoma.

✅ Invariantinė savybė — įjungtų lempučių skaičius yra nelyginis.

9. Jei profesorius įdeda į dėžutę x čiulpinukų ir $96 - x$ „Karvučių“, tai jų vietoje atsiranda $96 - x$ čiulpinukų ir x „Karvučių“. Tuomet čiulpinukų skaičiaus laboratorijoje pokytis yra $(96-x)-x = 96-2x$, t. y. lyginis skaičius.

Iš pradžių laboratorijoje buvo 1997 čiulpinukai. Kiekvieną kartą jų skaičiaus pokytis yra lyginis, todėl čiulpinukų skaičius visuomet bus nelyginis, taigi negali pasidaryti lygus nuliui.

Vadinasi, susikrauti visus čiulpinukus profesoriui Saldūnui nepavyks — teks išvažiuojant namo palikti čiulpinukų ir bendradarbiams.

✅ Invariantinė savybė — čiulpinukų visada yra nelyginis skaičius.

10. Iš pradžių berniukų ir mergaičių skaičiaus skirtumas lygus 4, t. y. $(11 - 7 = 4)$. Keičiantis su šokių grupe „Venera“, skirtumas keičiasi keturiais, t. y. $8 - 4 = 4$, o keičiantis su šokių grupe „Marsas“, skirtumas keičiasi dviem, t. y. $5 - 3 = 2$. Šis skirtumas iš pradžių yra lyginis skaičius ir keičiasi lyginiu skaičiumi, todėl visais atvejais lieka lyginis. Bet naujam šokiui reikia 15 mergaičių ir 10 berniukų. Šių skaičių skirtumas yra $15 - 10 = 5$, t. y. nelyginis skaičius, todėl numatyto šokio surepetuoti nepavyks.

☑ Invariantinė savybė — berniukų ir mergaičių skaičiaus šokių grupėje „Želsvelė“ skirtumas yra lyginis skaičius.

11. Atliekant bet kurią iš nurodytų operacijų, raidžių V skaičius sekoje arba nesikeičia, arba keičiasi dviem. Pradinėje sekoje yra keturios raidės V, taigi galutinėje sekoje negali būti trijų raidžių V.

☑ Invariantinė savybė — raidžių V skaičius visada yra lyginis.

12. Skaičius 24 ir 108 išskaidykime pirminiais dauginamaisiais:

$$24 = 2^3 \times 3^1 \quad \text{ir} \quad 108 = 2^2 \times 3^3.$$

Kas minutę skaičiaus pirminių daugiklių skaičiaus lyginumas keičiasi. Todėl po 60 min. jis bus toks pats kaip iš pradžių — lyginis skaičius. Bet 108 turi 5 pirminius daugiklius. Todėl 108 nurodytuoju būdu gauti negalima.

☑ Invariantinė savybė — kas 2 minutes skaičiaus pirminių daugiklių skaičius yra lyginis.

13. Iš pradžių visi skaičiai, užrašyti taisyklingojo 6-kampio viršūnėse, yra nelyginiai. Atlikus su nelyginiu skaičiumi ir pirmą, ir antrą operaciją, 6-kampio viršūnėse vėl gaunami nelyginiai skaičiai. Taigi visi skaičiai visada lieka nelyginiai. Bet skaičius 1996 yra lyginis, todėl šio skaičiaus gauti negalėsime.

☑ Invariantinė savybė — visi skaičiai lieka nelyginiai.

14. Sunumeruokime sektorius skaičiais nuo 1 ligi 14 paeiliui taip, kad 1 ct moneta būtų pirmame sektoriuje, o 2 ct moneta — antrajame. Galime pastebėti, kad moneta, kuri iš pradžių buvo sektoriuje su nelyginiu numeriu, keliauja tiktai po sektorius su nelyginiais numeriais. Todėl uždavinyje pageidaujamo rezultato negalima gauti.

☑ Invariantinė savybė — 1 ct moneta visada yra sektoriuje su nelyginiu numeriu.

15. a) Suskirstykime visas 12 viršūnių į 6 priešingų viršūnių poras: A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, A_4A_{10}, A_5A_{11}, A_6A_{12}. Atliekant operaciją, ženklas keičiasi tik vienoje kiekvienos poros viršūnėje. Tuomet porose A_2A_8, A_3A_9, $\ldots$, A_6A_{12} po nelyginio skaičiaus operacijų

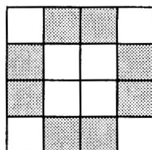
ženklai bus skirtingi, o po lyginio skaičiaus operacijų — vienodi; poroje A_1A_7 bus priešingai. Taigi negali būti, kad vienu metu poroje A_2A_8 ženklai būtų skirtingi, o poroje A_3A_9 — vienodi (būtent apie tokią padėtį kalbama sąlygoje).

b) Suskirstykime visas viršūnes į 4 grupes po tris viršūnes kiekvienoje: $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$. Vėl spręskime taip pat. Atliekant kiekvieną operaciją, pliuso ir minuso ženklų skaičiaus lyginumas kiekvienoje grupėje keičiasi, todėl grupėse $A_2A_6A_{10}$ ir $A_3A_7A_{11}$ jis visada bus vienodas.

c) Suskirstykime 12-kampio viršūnes į 3 grupes, po keturias viršūnes kiekvienoje: $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$. Sprendžiame lygiai taip pat.

16. Kvadratinę lentelę nuspalvinkime taip, kaip parodyta 7 paveiksle: kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje nuspalvinta po du langelius — iš viso 8 langeliai, o kiekvienoje eilutėje, stulpelyje ar įstrižainėje (įstrižainė apibrėžiama kaip 7 pavyzdyje) nuspalvintų langelių skaičius yra lyginis.

Po kiekvieno ėjimo nuspalvintuose langeliuose ženklų „ – “ pokytis yra lyginis skaičius. Iš pradžių ženklų „ – “ skaičius yra nelyginis. Todėl visuose nuspalvintuose langeliuose negalės vienu metu atsirasti ženklai „+“.



7 pav.

✓ Invariantinė savybė — nuspalvintuose langeliuose ženklų „ – “ skaičius yra nelyginis.

17. Lentelės 8×8 langeliuose išdėstykime šešias langelių grupes, kaip parodyta 8 paveiksle (tos pačios grupės langeliai žymimi vienodomis raidėmis). Matome, kad, panašiai kaip ir 16 uždavinyje, kiekvienoje lentelės eilutėje, stulpelyje ar įstrižainėje kiekvienos grupės langelių yra lyginis skaičius.

	A	A	E	E	B	B	
A		E	A	B	E		B
A		E	A	B	E		B
	A	A	E	E	B	B	
	D	D	F	F	C	C	
D		F	D	C	F		C
D		F	D	C	F		C
	D	D	F	F	C	C	

8 pav.

Kiekvienos grupės viename langelyje įrašykime ženklą „–", kituose — ženklą „+". Samprotaudami kaip ir ankstesniame uždavinyje, konstatuojame, kad kiekvienoje grupėje mažiausiai vienas ženklas „–" būtinai išlieka. Yra šešios tokios langelių grupės, todėl lentelėje būtinai išliks bent 6 ženklai „–".

Invariantinė savybė — kiekviename vienos grupės langelių aštuonete ženklų „–" skaičius lieka nelyginis.

18. Pradėję nuo apatinio kairiojo laukelio, suskirstykime visus laukelius į tris grupes: A, B ir C (9 pav.).

C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C

9 pav.

Iš pradžių kiekvienoje grupėje yra 18 kauliukų — lyginis skaičius. Keliant bet kurį kauliuką, dviejose grupėse kauliukų skaičius sumažėja 1, vienoje grupėje — padidėja 1. Tada po pirmojo kėlimo visose grupėse kauliukų skaičius yra nelyginis, o po antrojo — lyginis skaičius ir t. t. Taigi ant stalo negali likti tiktai vienas kauliukas, nes tada vienoje grupėje kauliukų skaičius būtų nelyginis, o dviejose — lyginis.

✅ Invariantinė savybė — kauliukų skaičiaus lyginumas visose grupėse visą laiką lieka vienodas.

19. Panagrinėkime etikečių skaičiaus kitimą per vieną dieną. Jonas gavo 4 naujas etiketes ir 1 etiketę atidavė, taigi jų padaugėjo trimis: $4 - 1 = 3$.

Iš pradžių Jonas turėjo 15 etikečių. Šis skaičius dalijasi iš 3. Bet 113 iš 3 nesidalija, todėl 113 etikečių Jonas niekada neturės.

✅ Invariantinė savybė — etikečių skaičius dalijasi iš 3.

20. Kaip ir spręsdami 18 uždavinį, suskirstykime lentos 10×10 langelius į tris grupes: A, B ir C. Tada A grupėje bus 34, B grupėje — 33 ir C grupėje — 33 langeliai.

Liūtas iš pradžių gali būti bet kurios grupės, tarkime B, langelyje. Panagrinėkime, kaip keičiasi langelio grupė atliekant ėjimus:

po 1 ėjimo — B $\rightarrow$ C,
po 2 ėjimo — C $\rightarrow$ A,
po 3 ėjimo — A $\rightarrow$ B ir t. t.

Po bet kurių trijų ėjimų figūra vėl grįžta į B grupės langelį. Tuomet atlikusi 33 kartus perėjimus (C, A, B), (C, A, B), ... , figūra bus apėjusi $33 \times 3 = 99$ langelius ir stovės B grupės langelyje.

Pagal uždavinio sąlygą figūra paskutiniu — šimtuoju ėjimu turėtų patekti į pradinį langelį. Bet tai neįmanoma, nes figūra jau stovi B grupės langelyje ir paskutiniu ėjimu pereis į C grupės langelį.

✅ Invariantinė savybė — kas trys ėjimai figūra atsistoja į B grupės langelį.

21. Tirdami operacijas, kurias galime atlikti su grupėmis, matome, kad figūrų ○ ir □ eilutėje skaičių skirtumas keičiasi skaičiaus 3 kartotiniu.

Nagrinėkime pradinę eilutę ○□○□○□. Čia figūrų ○ ir □ skaičių skirtumas lygus 0, taigi dalijasi iš 3. Tuomet kvadratų ir apskritimų skaičių skirtumas visada dalijasi iš 3.

Nagrinėkime galutinę eilutę: ○○□○□○□○. Čia figūrų ○ ir □ skaičiaus skirtumas lygus 1. Taigi iš pradinės eilutės negalime gauti pageidaujamos eilutės, nes joje esančių figūrų skaičių skirtumas nėra skaičiaus 3 kartotinis.

✅ Invariantinė savybė — figūrų ○ ir □ skaičių skirtumas yra 3 kartotinis.

22. Nagrinėkime abu skaičius 21 ir 3001. Skaičius 21 dalijasi iš 3, o skaičius 3001 — ne.

Įrodysime: jei kuris nors skaičius dalijasi iš 3, tai skaičius, kuris iš jo yra gautas nurodytomis operacijomis, taip pat dalijasi iš 3. Iš tikrųjų:

a) jei skaičius n dalijasi iš 3, tai ir $n+6$ dalijasi iš 3 (jei kiekvienas dėmuo dalijasi iš 3, tai ir suma dalijasi iš 3);

b) jei skaičius n dalijasi iš 3, tai ir skaičius $2n$ dalijasi iš 3;

c) jei skaičius n dalijasi iš 3, tai ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 3, o pakeitus dėmenų tvarką, suma nesikeičia.

Taigi, atlikus bet kurią operaciją, naujasis skaičius taip pat dalysis iš 3.

Skaičius 3001 iš 3 nesidalija, todėl šiomis operacijomis skaičiaus 3001 gauti negalima.

✅ Invariantinė savybė — gaunamas skaičius dalijasi iš 3.

23. Iš pradžių yra 63 ženklai „+" ir 1 ženklas „−". Taigi ženklų „+", „−" skaičių skirtumas yra lygus 62, bet skaičius 62 nesidalija iš 4.

Nagrinėkime, kaip keičiasi šis skirtumas, vienoje eilutėje arba viename stulpelyje ženklus pakeitus priešingais.

Tarkime, kad eilutėje arba stulpelyje yra x ženklų „−" ir $(8-x)$ ženklų „+". Tada vienos eilutės (ar stulpelio) ženklų skirtumas yra $(8-x)-x=8-2x$. Pakeitus ženklus, šis skirtumas yra $x-(8-x)=2x-8$.

Taigi skirtumas pakito dydžiu, kuris dalijasi iš 4:

$$(2x-8)-(8-2x)=2x-8-8+2x=4x-16.$$

Jei keičiame ženklus tiktai vienoje eilutėje (ar stulpelyje), tai nagrinėjamas skirtumas likusioje šachmatų lentos dalyje nesikeičia. Taigi ženklų „+" ir „−" skaičių skirtumas visoje šachmatų lentoje kinta dydžiu, kuris dalijasi iš 4.

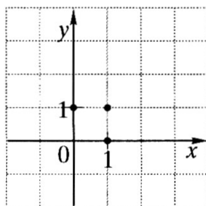
Jei šachmatų lentos visuose laukeliuose būtų ženklai „ + “, tai skirtumo reikšmė būtų 64, t. y. dalytųsi iš 4.

Kadangi iš pradžių skirtumas yra lygus 62 ir jis keičiasi tiktai skaičiaus 4 kartotiniu, tai jis negali pasidaryti lygus 64. Vadinasi, visuose laukeliuose gauti ženklų „ + “ negalėsime.

Invariantinė savybė — ženklų „ + “ ir „ – “ skaičiaus skirtumas nesidalija iš 4.

24. Nukreipkime koordinačių ašis taip, kad pradžios taškas būtų toje langelio viršūnėje, kurioje netupi žiogas (10 pav.). Tada vienam iš žiogų reikia patekti į tašką, kurio koordinatės yra (0; 0).

Iš pradžių žiogų koordinatės yra (0; 1), (1; 0), (1; 1). Žiogų koordinačių skirtumai yra sveikieji skaičiai. Jei žiogas iš taško *A* šoka per žiogą taške *B*, tai po šuolio to žiogo kiekviena koordinatė pasikeičia skaičiumi, kuris yra *B* ir *A* pradinės stovėjimo vietos atitinkamų koordinačių dvigubas skirtumas. Kadangi koordinačių skirtumai yra sveikieji skaičiai, tai abi koordinatės keičiasi lyginiais skaičiais.



10 pav.

Kiekvieno žiogo bent viena koordinatė iš pradžių yra nelyginis skaičius, todėl į tašką (0; 0) nė vienas žiogas nepateks.

Invariantinė savybė — kiekvieno žiogo bent viena koordinatė visada yra nelyginis skaičius.

25. Liekana, gaunama dalijant natūralųjį skaičių iš 9, yra lygi liekanai, gaunamai dalijant iš 9 šio skaičiaus skaitmenų sumą. Todėl natūraliojo skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas būtinai dalijasi iš 9. Jeigu bent vienoje operacijoje atimtume, tai visi tolesni sekos natūralieji skaičiai dalytųsi iš 9. Kadangi 91 nesidalija iš 9, tai 91 galima tikėtis gauti tiktai tada, kai prie skaičiaus vi-

są laiką pridėsime jo skaitmenų sumą. Tada skaičius keisis taip: $41 \to 46 \to 56 \to 67 \to 80 \to 88 \to 104 \to \cdots$. Visi tolesni skaičiai yra didesni už 91. Vadinasi, skaičiaus 91 gauti negalėsime.

Invariantinė savybė — skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 9.

26. Sunumeruokime medžius iš eilės. Tarkime, kad tam tikru laiko momentu 1-ame medyje tupi n_1 paukščių, 2-ame — $n_2, \ldots,$ 44-ame — n_{44}.

Nagrinėkime sumą $S = 1 \times n_1 + 2 \times n_2 + 3 \times n_3 + \cdots + 44 \times n_{44}$. Iš pradžių šios sumos reikšmė yra $1 + 2 + \cdots + 44 = 44 \times 22 + 22$. Dalijant ją iš 44, gaunama liekana 22.

Kai du paukščiai perskrenda į gretimus medžius priešingomis kryptimis, ši suma arba nesikeičia, arba pasikeičia skaičiumi 44 (įsitikinkite tuo nagrinėdami du atvejus: kai kuris nors iš paukščių kerta liniją tarp 1-ojo ir 44-ojo medžių arba ne). Todėl liekana, gaunama S dalijant iš 44, nesikeičia, t. y. lieka 22.

Jei kuriuo nors momentu visi paukščiai suskristų į vieną medį, tai suma S turėtų dalytis iš 44 be liekanos. Kaip matėme, to būti negali.

Invariantinė savybė — sumą S dalijant iš 44 gaunama liekana 22.

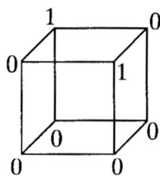


ALGEBRINIAI INVARIANTAI

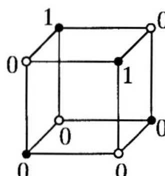
2.1. SUMA, SKIRTUMAS ARBA ELEMENTŲ SKAIČIUS

15 PAVYZDYS

Šešiose kubo viršūnėse įrašyti nuliai, o dviejose — vienetai (11 *pav.*). *Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurią kubo briauną ir prie jos abiejuose galuose parašytų skaičių pridėti po* 1. *Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visose kubo viršūnėse būtų įrašyti vienodi skaičiai?*



11 pav.



12 pav.

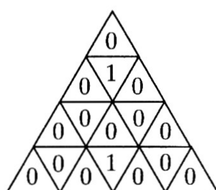
Sprendimas. Pirmiausia nuspalvinkime 4 kubo viršūnes, kaip parodyta 12 paveiksle. Nuspalvintose viršūnėse įrašytų skaičių suma lygi 2, o nenuspalvintose — lygi 0. Šių sumų skirtumas lygus 2. Kiekviena briauna turi vieną nuspalvintą ir vieną nenuspalvintą viršūnę. Pasirinkus briauną ir abiejuose jos galuose pridėjus po 1, vienu metu ir juodose, ir baltose viršūnėse įrašytų skaičių suma padidinama vienetu, todėl šių viršūnių skaičių sumų skirtumas nesikeičia. Taigi

jis visą laiką yra lygus 2. Tam, kad visose viršūnėse įrašyti skaičiai taptų vienodi, šis skirtumas turėtų būti lygus 0, bet tai yra negalima.

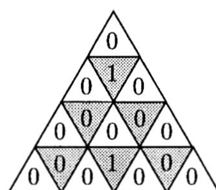
Invariantinė savybė — nuspalvintose ir nenuspalvintose viršūnėse įrašytų skaičių sumų skirtumas yra pastovus dydis, t. y. lygus 2.

16 PAVYZDYS

Vienu ėjimu leidžiama prie skaičių, esančių dviejuose bendrą kraštinę turinčiuose trikampiuose, pridėti po vienetą (13 *pav.*). *Ar kartojant ėjimus galima pasiekti, kad visuose trikampiuose būtų įrašyti vienodi skaičiai*?



13 pav.



14 pav.

Sprendimas. Nuspalvinkime trikampius, kaip parodyta 14 paveiksle. Pilkuose trikampiuose įrašytų skaičių suma lygi 2, o baltuose — 0. Šių sumų skirtumas lygus 2. Vienu ėjimu leidžiama bendrą kraštinę turinčiuose trikampiuose esančius skaičius padidinti vienetu, bet vienas iš tų trikampių visada pilkas, o kitas baltas. Todėl kiekvienu ėjimu pilkuose ir baltuose trikampiuose įrašytų skaičių suma padidėja 1, o šių sumų skirtumas nekinta ir visada lygus 2. Jeigu mums pavyktų visuose langeliuose įrašyti tą patį skaičių n, tai sumų skirtumas būtų lygus $-4n$, nes pilkų langelių yra 6, o baltų — 10. Bet n yra natūralusis skaičius ir $-4n$ negali būti lygus 2. Taigi visuose langeliuose vienodų skaičių įrašyti neįmanoma.

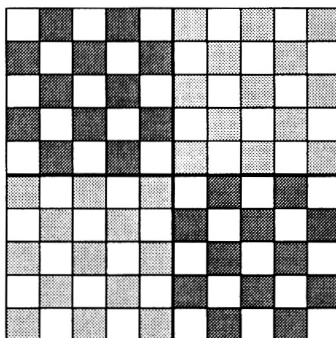
Invariantinė savybė — pilkuose ir baltuose trikampiuose įrašytų skaičių sumų skirtumas lygus 2.

17 PAVYZDYS

Ant stalo, kurio matmenys yra 10 × 10 *langelių, Pifas išdėliojo* 50 *puodelių po vieną į langelį:* 25 — *kairiajame apatiniame stalo ket-*

virtyje ir 25 — dešiniajame viršutiniame stalo ketvirtyje. Vienu ėjimu bet kurį puodelį leidžiama perkelti arba horizontaliai, arba vertikaliai, arba įstrižaine per šalia esantį puodelį į gretimą langelį, jei jis yra laisvas. Ar taip kilojant visi puodeliai gali atsidurti vienoje stalo pusėje?

Sprendimas. Pirmiausiai nuspalvinkime stalą kaip šachmatų lentą. Tada pradinėje pozicijoje 26 puodeliai atsidurs ant juodų langelių ir 24 puodeliai ant baltų langelių: $13 + 13 = 26$ ir $12 + 12 = 24$ (15 pav.).



15 pav.

Kiekvienu ėjimu leidžiama puodelį perkelti per vieną langelį, taigi puodelis vėl patenka į tos pačios spalvos langelį. Vadinasi, visada 26 puodeliai bus juoduose langeliuose. Bet stalo vienoje pusėje yra 25 juodi ir 25 balti langeliai. Vadinasi, pageidaujama padėtis nėra galima.

Invariantinė savybė — puodelių juoduose langeliuose skaičius yra pastovus.

18 PAVYZDYS

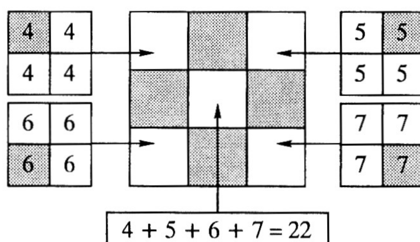
Lentelės 3×3 *langeliuose įrašyti nuliai. Leidžiama pasirinkti* 2×2 *langelių kvadratą ir visus jame esančius skaičius padidinti vienetu. Įrodykite, kad po keleto šitokių operacijų negalėsime gauti lentelės, parodytos* 16 *paveiksle.*

4	9	5
10	18	12
6	13	7

16 pav.

Įrodymas. Nagrinėkime lentelę, kurią reikia gauti galutiniame rezultate. Kvadrato 2×2, esančio kairiajame viršutiniame kampe, visi skaičiai turėtų būti didinami vienetu keturis kartus, nes pačiame kampiniame langelyje yra skaičius 4. Dešiniame viršutiniame kampe yra skaičius 5, taigi atitinkamo kvadrato 2×2 visi skaičiai didinami vienetu penkis kartus, o apatinių kvadratų — atitinkamai 6 ir 7 kartus.

Panagrinėkime 17 paveikslą ir išsiaiškinkime, kaip kinta skaičius centriniame langelyje, pildant kvadratus 2×2.



17 pav.

Matome: kiek padidėja lentelės viršūnėse įrašytų skaičių suma S, tiek pat padidėja ir centriniame langelyje įrašytas skaičius c. Taigi skirtumas $S - c$ nesikeičia. Iš pradžių $S - c = 0$. Vadinasi, jis negali pasidaryti lygus 4, kaip turėtų būti 16 paveiksle.

Invariantinė savybė — lentelės viršūnėse esančių skaičių sumos ir centriniame langelyje esančio skaičiaus skirtumas nesikeičia.

19 PAVYZDYS

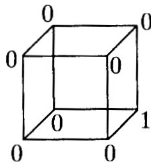
Lentoje parašyti 1997 *ženklai „ + “ ir* 1996 *ženklai „ – “. Vienu ėjimu galima nutrinti bet kuriuos du ženklus ir parašyti ženklą „ + “, jei nutrintieji ženklai vienodi, ir ženklą „ – “, jei nutrintieji ženklai skirtingi. Koks ženklas liks lentoje po* 3992 *ėjimų?*

Sprendimas. Pakeiskime kiekvieną ženklą „ + “ skaičiumi +1, o kiekvieną ženklą „ − “ skaičiumi −1. Atliekant nurodytas operacijas, lentoje užrašytų skaičių sandauga nesikeičia. Iš pradžių ji lygi +1, nes dauginamųjų −1 skaičius yra lyginis. Po 3992 ėjimų lentoje liks tiktai vienas skaičius, todėl tai bus skaičius +1. Taigi lentoje liks ženklas „ + “.

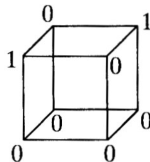
Invariantinė savybė — įvestų skaičių sandauga nekinta. (Beje, galima neįvedinėti skaičių ir remtis tuo, kad minusų skaičiaus lyginumas nekinta.)

UŽDAVINIAI

27. Kiekvienoje kubo viršūnėje yra įrašytas skaičius. Vienu ėjimu leidžiama prie dviejų skaičių, kurie yra vienoje kraštinėje, pridėti po vienetą. Ar atliekant šias operacijas galima gauti vienodus skaičius visose kubo viršūnėse, jei iš pradžių skaičiai išsidėstę taip, kaip parodyta a) 18 ir b) 19 paveiksluose?



18 pav.

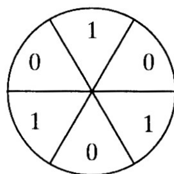


19 pav.

28. Keturiose kubo viršūnėse, iš kurių jokios dvi neprikauso vienai briaunai, įrašyti vienetai, o likusiose keturiose — nuliai. Vienu ėjimu leidžiama išsirinkti bet kurią kubo briauną ir prie jos abiejuose galuose parašytų skaičių pridėti 1. Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visose kubo viršūnėse būtų įrašyti vienodi skaičiai?

29. Skritulys padalytas į 6 sektorius, į kiekvieną kurių pakaitomis įrašyti skaičiai 0 ir 1 (20 pav.).

Vienu metu leidžiama padidinti vienetu du šalia esančius skaičius. Įrodykite, kad šiomis operacijomis negalima pasiekti, kad visi šeši skaičiai būtų lygūs.



20 pav.

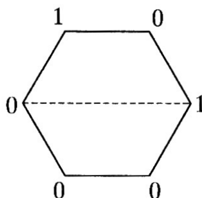
30. Mikė Pūkuotukas skritulį padalijo į 6 sektorius ir išdėliojo juose medaus puodus atitinkamai taip: 0, 0, 1, 0, 1, 0. Vienu ėjimu medaus puodų skaičių gretimuose sektoriuose leidžiama padidinti vienetu. Ar galima pasiekti, kad po keleto ėjimų visuose sektoriuose būtų vienodas skaičius medaus puodų?

31. Kvadratas sudarytas iš 4×4 langelių. Langeliuose įrašyti skaičiai, kaip tat parodyta 21 paveiksle. Vienu ėjimu prie skaičių, įrašytų dviejuose turinčiuose bendrą kraštinę langeliuose, galima pridėti po vienetą. Ar gali atsitikti taip, kad po kelių ėjimų visuose langeliuose skaičiai taptų lygūs?

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

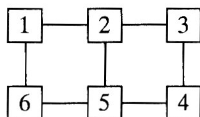
21 pav.

32. Šešiakampio viršūnėse įrašyti skaičiai, kaip parodyta 22 paveiksle. Vienu ėjimu galima pridėti po vienetą arba prie abiejų vienos (bet kurios) kraštinės galuose esančių skaičių, arba prie dviejose priešingose viršūnėse esančių skaičių. Ar atliekant daug kartų šiuos ėjimus galima pasiekti, kad visi skaičiai būtų vienodi?

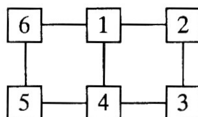


22 pav.

33. Kvadratėliuose įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, kaip tat parodyta 23 paveiksle. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurią gretimų skaičių porą (gretimi — tai skaičiai, sujungti atkarpomis) ir prie abiejų poros skaičių pridėti po tą patį sveikąjį skaičių (šis skaičius kiekvienu ėjimu gali būti kitas). Ar atliekant šias operacijas galima gauti 24 paveiksle parodytą padėtį?



23 pav.



24 pav.

34. Šachmatų lentos 8×8 kairiajame apatiniame kampe esančio kvadrato 3×3 langeliuose pastatyti 9 pėstininkai. Kiekvienas pėstininkas gali peršokti per gretimą, jei šalia yra laisvas langelis. Šokti galima arba vertikaliai, arba horizontaliai, arba įstrižaine. Ar galima perkelti pėstininkus į kitą kvadratą 3×3, kuris yra šachmatų lentos:

a) kairiajame viršutiniame kampe;

b) dešiniajame viršutiniame kampe?

35. Lentoje užrašyta keletas ženklų „ + “ ir „ – “. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir jų vietoje įrašyti ženklą „ + “, jei nutrinti du vienodi ženklai, ir ženklą „ – “, jei nutrinti du skirtingi ženklai. Įrodykite, kad pabaigoje likęs ženklas nepriklauso nuo to, kokia tvarka ženklai trinami.

2.2. SUDĖTINGI INVARIANTAI

20 PAVYZDYS

Nykštukas užrašė smėlyje skaičius: 9, 11, 13, 15, 17, 19. *Vienu ėjimu galima nutrinti bet kuriuos du skaičius ir parašyti vieną skaičių, kuris lygus nutrintųjų skaičių sumai, sumažintai vienetu (pvz., nutrynus* 11 *ir* 19, *parašoma* 29). *Po keleto tokių žingsnių smėlyje liks vienas skaičius. Ar gali jis būti lygus* 78?

Sprendimas. Pastebėsime, kad po kiekvieno ėjimo užrašytų skaičių suma sumažėja vienetu. Pažymėję užrašytų skaičių sumą S, o atliktų ėjimų skaičių n, gauname, kad $S+n$ didumas nesikeičia: kai n padidėja 1, tai S sumažėja vienetu. Iš pradžių $n=0$ ir $S=84$, taigi $S+n=84$; pabaigoje $n=5$ (skaičių sumažėja nuo 6 iki 1, t. y. padaromi 5 ėjimai), todėl $S+n=78+5=83$. Taigi gauti skaičiaus 78 negalima.

Invariantinė savybė — užrašytų skaičių ir atliktų ėjimų skaičiaus suma nesikeičia.

21 PAVYZDYS

Iš eilės užrašyti 1997 *vienetai. Leidžiama bet kuriuos du skaičius* a *ir* b *nutrinti ir jų vietoje užrašyti vieną naują skaičių* $\frac{a+b}{4}$. *Taip tęsiama tol, kol lieka užrašytas vienas skaičius. Ar gali jis būti mažesnis už* 0,0005?

Sprendimas. Nutrynus skaičius a ir b, jų vietoje užrašomas skaičius $\frac{a+b}{4}$. Remsimės nelygybe ($a>0$, $b>0$)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{\frac{a+b}{4}}. \qquad (1)$$

Ji teisinga, nes ekvivalenčiai pertvarkę gauname:

$$\frac{a+b}{ab}\geqslant\frac{4}{a+b}, \qquad (a+b)^2\geqslant 4ab,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$$
$$(a - b)^2 \geqslant 0,$$

o paskutinė nelygybė neabejotinai teisinga.

Iš (1) nelygybės išplaukia, kad po kiekvieno ėjimo visų užrašytų skaičių atvirkštinių dydžių suma nepadidėja. Iš pradžių ji yra $1997 \times \frac{1}{1} = 1997$; todėl ir pabaigoje ji nėra didesnė už 1997. Pabaigoje likusį vienintelį skaičių pažymėkime x. Tada „atvirkštinių dydžių suma" yra $\frac{1}{x}$. Taigi $\frac{1}{x} \leqslant 1997$, ir $x \geqslant \frac{1}{1997} > \frac{1}{2000} = 0{,}0005$. Vadinasi, negali atsitikti taip, kad likęs skaičius būtų mažesnis už 0,0005.



Invariantinė savybė — visų įrašytų skaičių atvirkštinių dydžių suma visada ne mažesnė kaip 1997.

UŽDAVINIAI

36. Lentoje nubraižyti keli apskritimai, kvadratai ir trikampiai. Vienu kartu leidžiama nutrinti bet kurias dvi figūras ir jų vietoje nubraižyti trečiąją vienu iš būdų:

- dviejų apskritimų vietoje — apskritimą;
- dviejų kvadratų vietoje — trikampį;
- dviejų trikampių vietoje — kvadratą;
- apskritimo ir kvadrato vietoje — kvadratą;
- apskritimo ir trikampio vietoje — trikampį;
- kvadrato ir trikampio vietoje — apskritimą.

Įrodykite, kad paskutinė liekanti figūra nepriklauso nuo to, kokia tvarka figūros trinamos.

37. Yra keli nenuliniai skaičiai. Bet kuriuos du skaičius A ir B leidžiama nutrinti ir jų vietoje įrašyti du naujus skaičius $A + \frac{B}{2}$ ir $B - \frac{A}{2}$. Įrodykite, kad atlikinėdami tokias operacijas niekada nebegausime pradinių skaičių.

38. Kiekvienoje penkiakampio viršūnėje užrašytas skaičius, mažesnis už 1000, o visų skaičių suma yra lygi 0. Vienu ėjimu kiekvieną iš skaičių pakeičiame greta jo esančių skaičių pussume, ir šią operaciją atliekame 100 kartų. Įrodykite, kad po šių operacijų kiekvienas iš skaičių bus mažesnis už 1.

39. Duoti skaičiai: vienetas ir devyni nuliai. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kuriuos du skaičius ir abu juos pakeisti šių skaičių aritmetiniu vidurkiu. Koks mažiausias skaičius gali atsirasti vieneto vietoje po keleto tokių operacijų?

40. Taisyklingojo 25-kampio viršūnėse užrašyti skaičiai a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{25}, ir $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{13} = 1$, o $a_{14} = a_{15} = \cdots = a_{25} = -1$. Su šiais skaičiais atliekame tokią operaciją: prie kiekvieno iš jų pridedame artimiausią pagal laikrodžio rodyklę skaičių. (Pavyzdžiui, prie a_7 pridedam a_8, o prie a_{25} pridedam a_1.) Gautuosius skaičius $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{25}$ ta pačia tvarka užrašome viršūnėse esančių skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ vietoje ir su jais atliekame tą pačią operaciją. Ją kartojame 100 kartų. Įrodykite, kad bent vienas iš gautųjų skaičių bus didesnis už 10^{20}.

2.3. PERIODIŠKUMAS

22 PAVYZDYS

Begalinė skaičių seka 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, ... *sudaryta taip: pirmieji du skaičiai yra* 1 *ir* 2, *o kiekvienas kitas skaičius, pradedant trečiuoju, yra dviejų prieš jį einančių skaičių sumos paskutinis skaitmuo. Ar šioje skaičių sekoje kur nors šalia yra skaičiai* 2 *ir* 4?

Sprendimas. Lyginius skaičius pažymėkime p, o nelyginius — n.

Tada skaičių seka atrodo taip: $n, p, n; n, p, n; n, p, n; n, p, n; \ldots$. Šioje sekoje periodiškai kartojasi grupė (n, p, n). Sekoje niekur nėra greta dviejų lyginių skaičių, taigi šioje sekoje niekur greta nebus skaičiai 2 ir 4.

Invariantinė savybė — sekoje periodiškai kartojasi grupė (n, p, n).

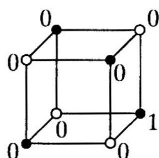
UŽDAVINIAI

41. Begalinė skaičių seka 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, ... sudaryta tokiu būdu: pirmieji du skaičiai lygūs 1, o kiekvienas tolesnis skaičius, pradedant trečiuoju, lygus dviejų prieš jį einančių skaičių sumos paskutiniam skaitmeniui. Ar šioje skaičių sekoje kur nors greta yra skaičiai 6 ir 8?

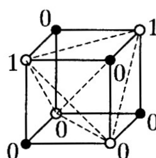
42. Begalinė skaičių seka 1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, ... sudaryta taip: du pirmieji jos nariai lygūs 1, o kiekvienas kitas, pradedant trečiuoju, gaunamas prie dviejų prieš tai buvusių skaičių sandaugos pridėjus 1. Ar šioje sekoje yra toks skaičius, kuris dalijasi iš 4?

27. a) Pastebėkime, kad visose viršūnėse įrašytų skaičių suma lygi 1 (nelyginis skaičius). Atliekant bet kurią iš nurodytų operacijų, visų skaičių suma padidėja dviem, todėl ji visada yra nelyginis skaičius. Jeigu visose viršūnėse rastųsi vienodi skaičiai, tai jų suma būtų lyginis skaičius, o tai neįmanoma.

b) (Sprendimas tinka ir a) atveju.) Nuspalvinkime kubo viršūnes taip (25 pav., 26 pav.), kaip nagrinėdami 15 pavyzdį. Nagrinėkime nuspalvintose ir nenuspalvintose viršūnėse esančių skaičių sumas. Iš pradžių jos nėra lygios, o kadangi kiekvienu ėjimu kiekviena suma padidėja vienetu, tai jos visada bus nelygios. Jeigu kada nors visi skaičiai pasidarytų vienodi, tai sumos taptų lygios, o tai neįmanoma.



25 pav.

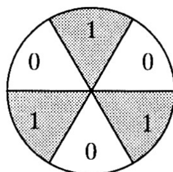


26 pav.

Invariantinė savybė — nuspalvintose ir nenuspalvintose viršūnėse esančių skaičių sumos yra lygios.

28. Sprendimas panašus į 27 b) uždavinio sprendimą.

29. Nuspalvinkime paeiliui sektorius: juodai, baltai, juodai, baltai, ... (27 pav.). Skaičių juoduose sektoriuose suma yra lygi 3, o baltuose — lygi 0. Šių sumų skirtumas lygus 3. Kiekvienu ėjimu ir juoduose, ir baltuose sektoriuose esančių skaičių sumos padidėja vienetu, taigi šių sumų skirtumas visada bus lygus 3. Vadinasi, negalima pasiekti, kad visi šeši skaičiai būtų lygūs, nes tada sumos būtų lygios.



27 pav.

Invariantinė savybė — juoduose ir baltuose sektoriuose įrašytų skaičių sumų skirtumas yra pastovus ir lygus 3.

30. Nuspalvinkime sektorius pakaitomis juodai, baltai, juodai, baltai, ... Tada juoduose sektoriuose yra 2 medaus puodai, o baltuose — 0. Medaus puodų juoduose ir baltuose sektoriuose skirtumas lygus 2. Kiekvienu ėjimu vienetu padidėja medaus puodų skaičius ir juoduose, ir baltuose sektoriuose, todėl puodų skaičiaus skirtumas išlieka 2. Taigi negali būti vienodas puodų skaičius juoduose ir baltuose sektoriuose.

Invariantinė savybė — juoduose ir baltuose sektoriuose sustatytų puodų skirtumas yra pastovus ir lygus 2.

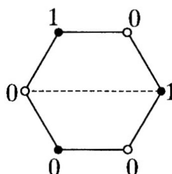
31. Nuspalvinkime langelius šachmatiškai (28 pav.). Juoduose langeliuose įrašytų skaičių suma lygi 0, o baltuose — 2. Šių sumų skirtumas lygus 2. Kiekvienu ėjimu ir juoduose, ir baltuose langeliuose įrašytų skaičių suma padidėja vienetu, todėl šių sumų skirtumas vėl bus lygus 2. Taigi šios sumos niekada nebus vienodos.

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

28 pav.

Invariantinė savybė — juoduose ir baltuose langeliuose įrašytų skaičių sumų skirtumas yra pastovus ir lygus 2.

32. Šešiakampio viršūnes iš eilės nuspalvinkime: juodai, baltai, juodai, baltai, . . . (29 pav.).



29 pav.

Kiekvienu ėjimu ir juodose, ir baltose viršūnėse įrašytų skaičių sumos padidėja vienetu, taigi jos abi niekada netaps vienodos.

✅ Invariantinė savybė — juodose ir baltose viršūnėse įrašytų skaičių sumų skirtumas yra lygus 2.

33. Kvadratėliuose įrašytus skaičius sužymėkime raidėmis, kaip parodyta 30 paveiksle. Pažiūrėkime, kaip po kiekvieno ėjimo keičiasi reikšmė

$$S = (a + b + c) - (A + B + C).$$

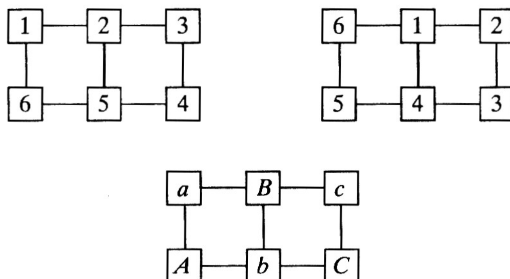
Nesunku įsitikinti, kad ji nesikeičia. Bet štai pirmoje padėtyje reikšmė

$$S_1 = (1 + 5 + 3) - (6 + 2 + 4) = 9 - 12 = -3,$$

o antroje padėtyje

$$S_2 = (6 + 4 + 2) - (5 + 1 + 3) = 12 - 9 = 3.$$

Kadangi $S_1 \neq S_2$, tai iš pirmos padėties gauti antrąją — neįmanoma.



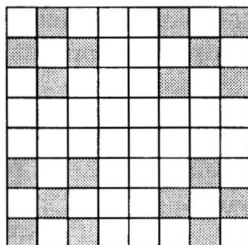
30 pav.

✅ Invariantinė savybė — dydis $(a + b + c) - (A + B + C) = -3$ yra pastovus skaičius.

34. Nagrinėkime pradinio, t. y. apatinio kairiojo kvadrato 3×3 langelius. Juose 5 pėstininkai stovi juoduose langeliuose ir 4 — baltuose.

a) Persikeldami pėstininkai lieka tos pačios spalvos langeliuose, todėl jų negalima sustatyti kairiajame viršutiniame 3×3 kvadrate, nes jame yra 4 juodi ir 5 balti langeliai (31 pav.).

b) Dešiniajame viršutiniame 3×3 langelių kvadrate 5 pėstininkai yra juoduose langeliuose ir 4 pėstininkai — baltuose. Galėtų atrodyti, kad pėstininkus perkelti galima.



31 pav.

Dar kartą nagrinėdami pradinį 3×3 langelių kvadratą, matome, kad, skaičiuojant iš kairės 6 pėstininkai yra nelyginėse vertikalėse ir 3 — lyginėse. Persikeldami iš nelyginių vertikalių pėstininkai persikels į nelygines, o iš lyginių — į lygines. Bet dešiniojo viršutinio kvadrato 6 langeliai yra lyginėse vertikalėse ir 3 langeliai — nelyginėse. Taigi pėstininkų perkelti į dešinįjį viršutinį kvadratą negalėsime.

Invariantinė savybė: a) pėstininkų juoduose langeliuose skaičius nesikeičia; b) pėstininkų lyginėse vertikalėse skaičius nesikeičia.

35. Kiekvieną ženklą „ + “ pakeiskime skaičiumi $+1$, o kiekvieną ženklą „ – “ — skaičiumi -1. Atliekant nurodytas operacijas, visų skaičių sandauga nesikeičia. Taigi paskutinis skaičius, kuris liks lentoje, nepriklauso nuo to, kokia tvarka skaičius nutrinsime. Paskutinis skaičius bus lygus visų pradinių skaičių sandaugai.

Invariantinė savybė — visų skaičių sandauga nesikeičia.

Pastaba. Šis uždavinys iš esmės nesiskiria nuo 19 pavyzdžio. Lygiai taip pat, kaip ir ten, galima invariantinę savybę imti tokią: pliusų skaičiaus lyginumas nesikeičia.

36. Galime pastebėti, kad po kiekvieno ėjimo kvadratų ir trikampių skaičiaus skirtumas lentoje arba nesikeičia, arba keičiasi trimis. Todėl šio skirtumo liekana dalijant iš 3 visą laiką lieka ta pati. Jei pabaigoje lentoje lieka apskritimas, tai šis skirtumas lygus 0, o jo liekana dalijant iš 3 lygi 0. Jei pabaigoje lentoje lieka kvadratas, tai šis skirtumas lygus 1, o jo liekana dalijant iš 3 lygi 1. Jei pabaigoje lentoje lieka trikampis, tai šis skirtumas lygus -1, o jo liekana dalijant iš 3 lygi 2.

Vadinasi, pabaigoje liekanti figūra priklauso tik nuo to, kokia liekana gaunama pradinį kvadratų ir trikampių skaičiaus skirtumą dalijant iš 3.

Invariantinė savybė — liekana, gaunama dalijant kvadratų ir trikampių skaičiaus skirtumą iš 3, yra pastovi.

37. Pastebėkime, kad po kiekvienos operacijos keičiasi visų skaičių kvadratų suma.

Atlikę pirmą ėjimą, skaičių A ir B vietoje gauname skaičius $A + \frac{B}{2}$ ir $B - \frac{A}{2}$. Jų kvadratų suma

$$\left(A + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right)^2 = A^2 + AB + \frac{B^2}{4} + B^2 - AB + \frac{A^2}{4} =$$
$$= \frac{5}{4}A^2 + \frac{5}{4}B^2 = \frac{5}{4}\left(A^2 + B^2\right).$$

Taigi visų skaičių kvadratų suma padidėja. Vadinasi, po kelių ėjimų kvadratų suma bus didesnė negu iš pradžių. Taigi pradinių skaičių gauti negalime, nes tuomet kvadratų suma būtų tokia pati kaip ir pradžioje.

Invariantinė savybė — po kiekvienos operacijos skaičių kvadratų suma didėja.

38. Pažymėkime skaičius eilės tvarka A, B, C, D, E. Pagal sąlygą $A + B + C + D + E = 0$. Po pirmo ėjimo gauname skaičius:

$$\frac{E+B}{2}, \quad \frac{A+C}{2}, \quad \frac{B+D}{2}, \quad \frac{C+E}{2}, \quad \frac{D+A}{2}.$$

Jų suma nepakito, taigi po kiekvieno ėjimo ji lieka lygi 0.

Po antro ėjimo gauname skaičius:

$$\frac{2A+C+D}{4}, \quad \frac{2B+D+E}{4}, \quad \frac{A+2C+E}{4},$$
$$\frac{A+B+2D}{4}, \quad \frac{B+C+2E}{4}.$$

Jei M yra didžiausias iš skaičių A, B, C, D, E modulių, tai kiekvieno iš gautųjų skaičių modulis bus ne didesnis kaip $\frac{3}{4}M$.

Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}|2A + C + D| &= \left|2A + C + D - (A + B + C + D + E)\right| \\ &= |A - B - E| \leqslant |A| + |B| + |E| \leqslant 3M.\end{aligned}$$

Vadinasi, po dviejų ėjimų skaičių didžiausias modulis sumažės mažiausiai $\frac{4}{3}$ karto.

Taip bus ir toliau. Po 100 ėjimų ($100 = 50 \times 2$) skaičių didžiausias modulis sumažės mažiausiai $(\frac{4}{3})^{50}$ kartų. Bet

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{50} > \left(\frac{4}{3}\right)^{48} = \left(\frac{64}{27}\right)^{16} > 2^{16} = 2^6 \cdot 2^{10} = 64 \cdot 1024 > 64\,000.$$

Įsitikinkime, kad iš pradžių didžiausias skaičiaus modulis negali viršyti 4000. Iš tikrųjų, pagal sąlygą teigiamieji skaičiai mažesni už 1000. Neigiamųjų skaičių modulių suma lygi teigiamųjų skaičių sumai. Teigiamųjų skaičių yra ne daugiau kaip 4 (kitaip visų skaičių suma būtų teigiama), todėl jų suma mažesnė už 4000. Vadinasi, neigiamųjų skaičių moduliu suma mažesnė už 4000, taigi ir kiekvienas neigiamasis skaičius moduliu mažesnis už 4000.

Taigi didžiausias modulis mažesnis už 4000, o po 100 žingsnių jis sumažės daugiau kaip 64 000 kartų. Tad jis pasidarys mažesnis už 1 (ir net už $\frac{1}{16}$; beje, skaičiuokliu nesunku patikrinti, kad didžiausias modulis bus mažesnis net už $4000 \cdot (\frac{3}{4})^{50} < 0{,}0023$).

Invariantinės savybės:

1) visų skaičių suma lieka lygi nuliui;
2) po kiekvienų dviejų ėjimų skaičių didžiausias modulis sumažėja mažiausiai $\frac{4}{3}$ karto.

39. Pasekime, kaip atliekant ėjimus keičiasi mažiausias nenulinis skaičius. Pažymėkime jį m. Iš pradžių $m = 1$.

Skaičiuodami skaičiaus m ir nulio aritmetinį vidurkį, ir skaičiaus m, ir šio nulio vietoje rašome $\frac{m}{2}$. Tada mažiausias nenulinis skaičius tampa $\frac{m}{2}$, o nulių skaičius sumažėja vienetu.

Skaičiuodami mažiausio nenulinio skaičiaus m ir kurio nors kito nenulinio skaičiaus M (tada $M \geqslant m$) aritmetinį vidurkį, ir m, ir M

vietoje įrašome $\frac{m+M}{2}$; šiuo atveju mažiausias nenulinis skaičius padidėja arba lieka toks pat (pastebėsime, kad vienodi m gali pasikartoti įvairiose pozicijose, o naujų nulių po šio ėjimo neatsiranda.

Taigi:

1) ėjimų, po kurių m sumažėja, negali būti daugiau kaip 9 (pradinis nulių skaičius);
2) jei m sumažėja, tai jis tampa lygus $\frac{m}{2}$.

Iš čia išplaukia, kad m (tuo pačiu ir vieneto vietoje atsirandantis skaičius) negali tapti mažesnis kaip $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$. Bet visiškai aišku, kaip pasiekti, kad pradinio vieneto vietoje atsirastų $\frac{1}{512}$. Taigi uždavinio atsakymas yra $\frac{1}{512}$.

✅ Invariantinės savybės:

1) visi skaičiai, kurie atsiranda po pakeitimų, yra teigiami arba lygūs 0, o vieneto vietoje visada yra nenulinis skaičius;
2) jei mažiausias nenulinis skaičius sumažėja, tai jis sumažėja du kartus, ir vienetu sumažėja nulių skaičius.

40. Lengva matyti, kad $b_1 + b_2 + \cdots + b_{25} = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{24} + a_{25}) + (a_{25} + a_1) = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{25})$. Taigi po kiekvieno ėjimo visų užrašytų skaičių suma padidėja du kartus. Iš pradžių visų skaičių suma yra 1. Po 100 ėjimų visų užrašytų skaičių suma bus $2^{100} = 2^5 \times 2^{95} > 32 \times (2^{10})^9 > 25 \times 1024^9 > 25 \times 1000^9 = 25 \times 10^{27} > 25 \times 10^{20}$.

Kadangi 25 skaičių suma yra didesnė už 25×10^{20}, tai kuris nors iš jų yra didesnis už 10^{20}.

✅ Invariantinė savybė — po kiekvieno ėjimo visų užrašytų skaičių suma padidėja du kartus.

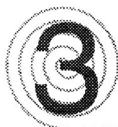
41. Lyginius skaičius pažymėsime l, o nelyginius skaičius — n. Skaičių seka yra tokia: $n, n, l; n, n, l; n, n, l; \ldots$. Joje periodiškai pasikartoja grupė (n, n, l). Joje nėra greta dviejų lyginių skaičių, todėl sekoje niekur neatsiras greta skaičių 6 ir 8.

✅ Invariantinė savybė — sekoje periodiškai pasikartoja grupė (n, n, p).

42. Nagrinėkime liekanas, kurios gaunamos, sekos skaičius dalijant iš 4. Iš pradžių šios liekanos lygios 1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, ...

Tarkime, kad skaičius A ir B dalijant iš 4 atitinkamai gaunamos liekanos a ir b. Tada $A = 4x + a$, $B = 4y + b$ (x ir y — sveikieji skaičiai), $A \times B = (4x + a)(4y + b) = 16xy + 4xb + 4ya + ab = 4(4xy+xb+ya)+ab$. Dalijant sandaugą $A \times B$ iš 4, liekaną nusako tiktai dėmuo ab, t. y. dauginamųjų A ir B liekanos.

Matome, kad liekanų sekoje antrą kartą atsirado pora (2; 3). Toliau viskas kartosis, ir liekanų sekos periodas bus (2; 3; 3). Vadinasi, joje niekada neatsiras liekana 0. Taigi nė vienas duotosios sekos narys nesidalija iš 4.

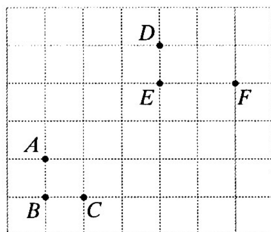


GEOMETRINIAI INVARIANTAI

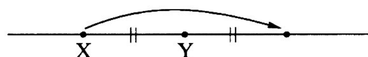
3.1. PLOTAS

23 PAVYZDYS

Plokštuma padalyta į vienodus kvadratėlius kaip languotas popieriaus lapas. Pažymėtos 6 kvadratėlių viršūnės: A, B, C, D, E, F (32 pav.).



32 pav.

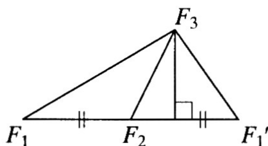


33 pav.

Viršūnėse A, B, C stovi figūros. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti dvi bet kurias figūras X *ir* Y *ir perkelti figūrą* X *per* Y *taip, kad figūra* Y, *figūros* X *buvusi bei naujoji vietos būtų vienoje tiesėje, be to, atstumas tarp figūrų* X *ir* Y *liktų nepakitęs* (33 *pav.*). *Ar po keleto tokių ėjimų gali susidaryti situacija, kad figūra iš taško A persikels į tašką D, iš B — į E, o iš C — į F?*

Sprendimas. Taškus, kuriuose stovi figūros, pažymėkime F_1, F_2, F_3. Atliekant ėjimus trikampio $F_1F_2F_3$ plotas nesikeičia.

Iš tikrųjų, $\triangle F_1F_2F_3$ ir $\triangle F_1'F_2F_3$ pagrindai F_1F_2 ir $F_1'F_2$ lygūs ir bendra aukštinė, taigi jų plotai lygūs (34 pav.).



34 pav.

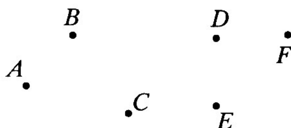
O štai $\triangle ABC$ ir $\triangle DEF$ plotai nelygūs, todėl sąlygoje minimos situacijos negausime.

Invariantinė savybė — figūrų sudaromo trikampio plotas nesikeičia.

3.2. ORIENTACIJA

24 PAVYZDYS

Ledo ritulio aikštėje pažymėti taškai A, B, C, D, E, F (35 *pav.*).



35 pav.

Taškuose A, B, C yra padėta po ritulį. Žaidėjas treniruojasi mesti į vartus. Jis pričiuožia prie kurio nors ritulio ir meta jį į vartus, kuriuos sudaro abu likę rituliai. Po to pričiuožia prie kurio nors kito ritulio ir daro tą patį, ir t. t. Tarkime, kad rituliai slysta tiese, bet nepasiekia krašto ir sustoja. Be to, ritulys visada kerta vartų liniją, t. y. visi metimai yra sėkmingi. Ar gali atsitikti taip, kad po 1998 *metimų ritulys iš taško A pateks į tašką D, iš taško B — į tašką E, o iš taško C — į tašką F?*

Sprendimas. Pastebime, kad jei prieš metimą rituliai *A*, *B*, *C* išsidėstę ant ledo pagal laikrodžio rodyklę, tai po metimo jie išsidėsto prieš laikrodžio rodyklę, ir atvirkščiai. (Įsitikinkite tai savarankiškai išnagrinėję atvejus, kai metamas ritulys *A*, ritulys *B* arba ritulys *C*.)

Tada po lyginio skaičiaus metimų ritulių orientacija yra tokia pati kaip iš pradžių. Lieka pastebėti, kad:

1) 1998 — lyginis skaičius;
2) *A*, *B*, *C* išsidėstę laikrodžio rodyklės kryptimi;
3) *D*, *E*, *F* išsidėstę prieš laikrodžio rodyklės kryptį.

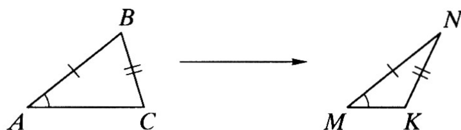
Taigi uždavinio sąlygoje pageidaujamas išsidėstymas yra nepasiekiamas.

Invariantinė savybė — ritulių sudaryto trikampio orientacija kas du metimus yra tokia pat.

3.3. SPINDULYS

25 PAVYZDYS

Bet kurį trikampį ABC leidžiama pakeisti nauju trikampiu MNK taip, kad $AB = MN$, $BC = NK$ ir $\angle A = \angle M$ (36 pav.).



36 pav.

Po keleto tokių ėjimų iš pradinio trikampio XYZ gautas į jį panašus trikampis $X_1Y_1Z_1$. Įrodykite, kad $\triangle XYZ = \triangle X_1Y_1Z_1$.

Sprendimas. Apie $\triangle ABC$ apibrėžto apskritimo spindulį pažymėkime R_1, o apie $\triangle MNK$ apibrėžto apskritimo spindulį — R_2. Remiantis gerai žinoma formule,

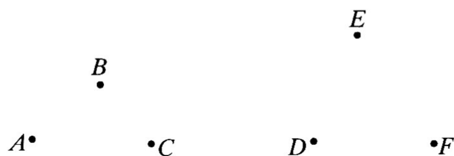
$$R_1 = \frac{BC}{2\sin A} \quad \text{ir} \quad R_2 = \frac{NK}{2\sin M}.$$

Iš čia $R_1 = R_2$.

Galime pastebėti, kad atliekant šiuos keitimus, invariantinis dydis yra apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis. Taigi apibrėžtų apie $\triangle XYZ$ ir $\triangle X_1Y_1Z_1$ apskritimų spinduliai lygūs. O dabar užtenka pastebėti, kad panašūs trikampiai, įbrėžti į vienodo spindulio apskritimus, yra lygūs.

UŽDAVINIAI

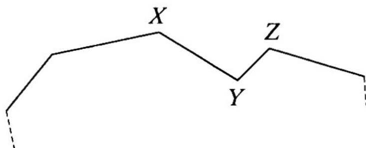
43. Taškuose A, B, C yra po kauliuką (37 pav.). Vienu ėjimu galima pasirinkti vieną kauliuką ir pastumti jį bet kuriuo atstumu lygiagrečiai tiesei, kurią nusako abu likę kauliukai. Ar gali atsitikti taip, kad kauliukai persikeltų į taškus D, E, F (nesvarbu, kuris kauliukas į kurį tašką)?



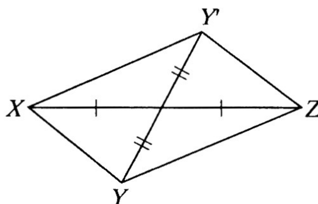
37 pav.

44. Iš Rygos į Valmierą išvyksta trys automašinos: pirmiausia A, tada B, po to C. Važiavimo metu 11 kartų viena mašina pralenkia kitą, bet niekada vienu metu neįvyksta du lenkimai (t. y. kiekviename lenkime dalyvauja tiktai 2 mašinos — ta, kurią pralenkia, ir ta, kuri pralenkia). Ar gali įvykti taip, kad Valmieroje pirmiausiai finišuos B, tada C ir po to A?

45. Popieriaus lape nubraižytas daugiakampis. Jei dvi jo kraštinės XY ir YZ sudaro „įlinkimą“ (žr. 38 pav.), tai leidžiama jas pakeisti dviejomis naujomis XY' ir $Y'Z$, kurios yra simetriškos atkarpos XZ vidurio taško atžvilgiu atitinkamai kraštinėms YZ ir XY (žr. 39 pav.).



38 pav.



39 pav.

Tai leidžiama daryti tiktai tada, jei naujosios kraštinės neturi bendro taško su buvusiojo daugiakampio dalimi (išskyrus taškus X ir Z). Suprantama, po šių operacijų, panaikinus vieną įlinkimą, gali atsirasti kitas. Ar atliekant šias operacijas daug kartų galima gauti pradinį daugiakampį?

43. Nesunku suprasti, kad kauliukų sudaromo trikampio plotas atliekant operacijas nesikeičia. Bet $\triangle DEF$ plotas akivaizdžiai didesnis už $\triangle ABC$ plotą. Todėl figūros atsidurti taškuose D, E ir F negali.

Invariantas — trikampio plotas.

44. Visus galimus automašinų išsidėstymus kelyje Ryga–Valmiera padalijame į 2 grupes:

1 grupė	2 grupė
CBA	CAB
BAC	ABC
ACB	BCA

Nesunku pastebėti, kad įvykus vienam (bet kuriam) lenkimui automašinų išsidėstymas pereina iš vienos grupės į kitą (patikrinkite tai savarankiškai, ištyrę visus galimus atvejus).

Uždavinyje minėtas pradinis išsidėstymas CBA ir pageidaujamas pabaigoje išsidėstymas ACB yra iš pirmos grupės. Bet tada tarp jų turi būti įvykęs lyginis skaičius lenkimų. Tačiau 11 yra nelyginis skaičius. Todėl uždavinyje pageidaujama tvarka automašinos atvykti negalės.

Invariantinė savybė — po kiekvienų dviejų lenkimų automašinų išsidėstymas priklauso tai pačiai grupei, kaip ir važiavimo pradžioje.

45. Atliekant kiekvieną operaciją daugiakampio plotas didėja. Todėl pradinio daugiakampio jau nebegausime.

Invariantinė savybė — po kiekvienos operacijos daugiakampio plotas padidėja.

4 INVARIANTAI ŽAIDIMUOSE

Kiekvienas iš mūsų žaidimą pradedame tikėdamiesi nugalėti. To paties siekia ir priešininkas. Kovai su juo reikia išmanyti žaidimo strategiją — visumą metodų, besiremiančių logiškais samprotavimais ir lemiančių mūsų veiksmų eigą žaidžiant.

Matematinių žaidimų yra labai daug. Čia nagrinėsime tiktai tokius žaidimus, kur du žaidėjai (vadinsime juos pirmuoju ir antruoju) pakaitomis atlieka po vieną ėjimą ir kur lygiosios negalimos, t. y. kiekvieną partiją būtinai laimi arba pirmasis, arba antrasis žaidėjas.

Smulkiau paanalizavę, pastebėtume, kad kiekvienam tokiam žaidimui pasirinkta strategija yra susijusi su kokio nors invarianto radimu.

Plačiausiai naudojami invariantai susiję su simetrija ir jos apibendrinimais.

4.1. SIMETRIJA TAŠKO ATŽVILGIU

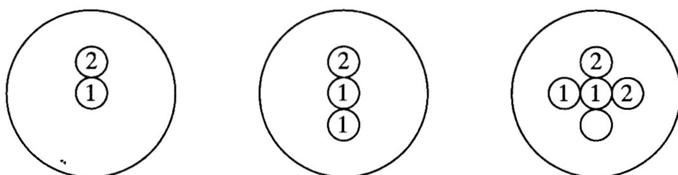
26 PAVYZDYS

Du žaidėjai paeiliui ant apvalaus stalo deda apvalias vienodo didumo servetėles taip, kad jos nepersiklotų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo. Katras žaidėjas laimi?

Sprendimas. Įsivaizduokime, kad stalas mažas — vos vos didesnis už servetėlę. Tada pirmas žaidėjas, padėjęs pirmuoju ėjimu servetėlę

taip, kad jos centras sutaptų su stalo centru, laimėtų, nes antrasis servetėlės nebegalėtų padėti.

Tarkime, kad stalas didelis, ant kurio telpa daug servetėlių. Jei pirmas žaidėjas padeda servetėlę stalo centre, tai likusi dalis stalo yra simetriška centro atžvilgiu. Sakykime, kad antrasis žaidėjas savo servetėlę padėjo bet kurioje vietoje. Kadangi prieš šį ėjimą laisva stalo dalis yra simetriška ir antrojo žaidėjo padėta servetėlė negali uždengti vienu metu jokių dviejų taškų, kurie yra simetriški vienas kitam stalo centro atžvilgiu, tai simetriškai antrojo žaidėjo ką tik padėtai servetėlei yra laisva vieta, kurioje galima padėti tokią pat servetėlę (40 pav.).



40 pav.

Tada pirmasis žaidėjas savo servetėlę gali padėti simetriškai stalo centro atžvilgiu antrojo žaidėjo padėtai servetėlei.

Pastebėkime, kad po pirmojo žaidėjo atlikto ėjimo laisva vieta, kurioje vėl galima padėti servetėles, taip pat yra simetriška — pirmasis žaidėjas savo ėjimu tuo pasirūpino!

Antrajam žaidėjui atlikus savo ėjimą, pirmasis galės padėti servetėlę simetriškoje vietoje, ir laisva vieta, kurioje toliau galima dėti servetėles, vėl bus simetriška.

Pirmasis žaidėjas turi žaisti taip ir toliau — kopijuoti antrojo žaidėjo ėjimus simetriškai stalo centro atžvilgiu. Taip pirmasis žaidėjas išsaugo invariantinę savybę — po jo ėjimų laisva vieta yra simetriška centro atžvilgiu. Kartu ši savybė garantuoja, kad pirmajam žaidėjui ėjimų nepritrūks — jei antrasis gali padėti servetėlę kurioje nors vietoje, tai pirmasis ją gali padėti simetriškoje vietoje.

Bet aišku, kad žaidimas negali tęstis be galo — tam tikru momentu vietos ant stalo padėti naujai servetėlei nebebus. Pirmajam žaidėjui

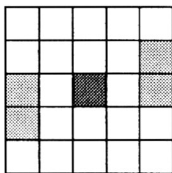
ėjimų nepritrūks, todėl jų pritrūks antrajam žaidėjui. Taigi antrasis žaidėjas pralaimės, o pirmasis — laimės.

Panašiai reikia analizuoti visus šio skyrelio uždavinius.

27 PAVYZDYS

Du lokiukai — Lepeškiukas ir Kudliukas dėlioja medaus statinaites kvadrate, kuris sudarytas iš 5×5 *langelių. Vienu ėjimu leidžiama padėti* 1 *medaus statinaitę viename langelyje arba* 2 *medaus statinaites po vieną dviejuose gretimuose langeliuose, jei jie yra laisvi. Tas lokiukas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi, o lokiukas, kuris laimi, pasiima visas medaus statinaites. Katras lokiukas, teisingai žaisdamas, laimi (žaidimą pradeda Lepeškiukas)?*

Sprendimas. Pirmu ėjimu Lepeškiukui reikia padėti vieną medaus statinaitę į kvadrato centrą (41 pav.).



41 pav.

Antru ėjimu antrasis žaidėjas — Kudliukas savo medaus statinaitę (arba dvi) gali pastatyti bet kurioje vietoje. Trečiu ėjimu Lepeškiukas pastatys medaus statinaitę (atitinkamai dvi statinaites) simetriškai kvadrato centro atžvilgiu Kudliuko pastatytai statinaitei (statinaitėms). Ir toliau Lepeškiukas žaidžia panašiai.

Jei Kudliukas gali atlikti eilinį ėjimą, tai yra galimas simetriškas ėjimas, kurį atliks Lepeškiukas.

Taigi žaidimą laimės Lepeškiukas, t. y. pirmasis žaidėjas.

46. Du žaidėjai nudažo po vieną kvadrato 10×10 langelį. Be to, nė vienas žaidėjas negali nudažyti langelio, kuris turi bendrą kraštinę su prieš tai nudažytu langeliu. Tas žaidėjas, kuris negali padaryti ėjimo, pralaimi. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimi — tas, kuris atlieka pirmąjį, ar tas, kuris atlieka antrąjį ėjimą?

47. Du žaidėjai deda saldainius „Meška“ ir „Voveraitė“ į lentelę, kurios matmenys yra 7×7 langeliai. Pirmasis žaidėjas deda saldainį „Meška“, o antrasis — „Voveraitė“. Leidžiama dėti po vieną saldainį. Pabaigoje jie suskaičiuoja, kiek yra tokių eilučių ir stulpelių, kuriuose saldainių „Meška“ yra daugiau negu saldainių „Voveraitė“, ir atvirkščiai. Žaidėjas, kurio tokių stulpelių ir eilučių yra daugiau, laimi ir pasiima visus saldainius. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

48. Į eilę sudėta 17 kamuoliukų. Du žaidėjai vienas po kito perdažo arba vieną, arba du šalia esančius kamuoliukus. Tas žaidėjas, kuriam nebelieka kamuoliuko, pralaimi (antrą kartą perdažyti negalima). Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės — pirmasis ar antrasis? Katras laimėtų, jei reikėtų perdažyti 18 kamuoliukų?

49. Yra 1 metro ilgio balta atkarpa. Du žaidėjai paeiliui nudažo raudona spalva po vieną ne mažiau kaip 1 cm ir ne daugiau kaip 2 cm ilgio atkarpą. Be to, antrą kartą negalima dažyti nė vieno jau nudažyto taško. Pralaimi tas žaidėjas, kuris daugiau jau nebegali padaryti ėjimo. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

50. Yra 8 keturių spalvų balionai: 2 raudoni, 2 mėlyni, 2 žali ir 2 geltoni. Du žaidėjai paeiliui pritvirtina juos prie kubo viršūnių. Pirmasis žaidėjas laimi, jei pritvirtinus visus balionus galima rasti kubo briauną, kurios abiejuose galuose pritvirtinti vienos spalvos balionai. Priešingu atveju laimi antrasis žaidėjas. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

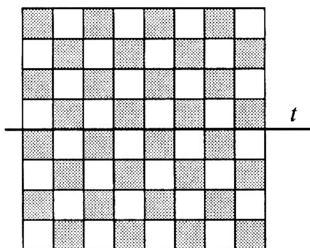
4.2. SIMETRIJA AŠIES ATŽVILGIU

28 PAVYZDYS

Du žaidėjai šachmatų lentoje paeiliui po vieną stato rikius taip, kad jie vienas kito nekirstų (rikių spalva nesvarbi). Pralaimi tas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimi?

Sprendimas. Galėtume bandyti naudotis simetrija centro atžvilgiu. Šachmatų lenta yra iš 8×8 langelių, todėl ji neturi simetrijos centro. Tuomet reikėtų pasvarstyti, kokios strategijos laikytis, kad laimėtų antrasis žaidėjas, statydamas savo rikius simetriškai pirmojo žaidėjo pastatytiems rikiams kvadrato centro — keturių vidurinių langelių bendros viršūnės — atžvilgiu. Tačiau šis sprendimas būtų blogas, nes tokios strategijos negalima realizuoti — jei pirmasis žaidėjas pastato savo rikį vienoje iš įstrižainių, tai jam simetriškas langelis yra kertamas ir antrasis žaidėjas ten rikio statyti negali.

Spręsdami šį uždavinį, pasinaudosime simetrija ašies atžvilgiu. Simetrijos ašimi pasirinkime tiesę, kuri skiria ketvirtą ir penktą horizontales. Kiekvieni du simetriški šios ašies atžvilgiu langeliai yra skirtingų spalvų, todėl rikis, pastatytas viename iš tų langelių, nekirs kito (42 pav.).



42 pav.

Tai leidžia antrajam žaidėjui naudotis simetrijos strategija.

Jis daro taip: į kiekvieną pirmojo žaidėjo ėjimą atsako, pastatydamas rikį simetriškai ašies t atžvilgiu pirmojo žaidėjo rikiui. Kartu jis garantuoja, kad laisva vieta, kurioje dar galima pastatyti rikius, yra simetriška ašies t atžvilgiu. Be to, jei pirmasis žaidėjas galės padaryti ėjimą, tai atitinkamą ėjimą galės padaryti ir antrasis. Tada antrajam

žaidėjui ėjimų nepritrūks. Vadinasi, jų pritrūks pirmajam žaidėjui. Taigi antrasis žaidėjas laimės.

29 PAVYZDYS

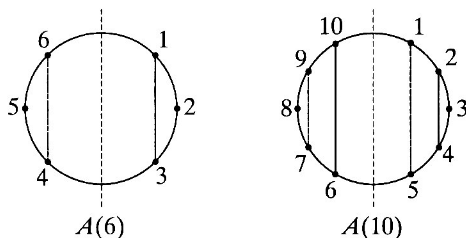
Apskritime pažymėta n taškų, kurie iš eilės sunumeruoti skaičiais $1, 2, \ldots, n$. *Šis apskritimas yra žaidimo* $A(n)$ *erdvė. Du žaidėjai paeiliui brėžia po stygą, jungiančią du taškus, kurių numeriai yra vienodo lyginumo (arba abu lyginiai skaičiai, arba abu nelyginiai). Leidžiama jungti tiktai taškus, kurie dar nėra sujungti nė su vienu kitu. Nubrėžtos stygos negali kirstis. Tas žaidėjas, kuris negali padaryti ėjimo, pralaimi. Su kuriomis n reikšmėmis žaidimą* $A(n)$ *laimi pirmasis žaidėjas?*

Sprendimas. Lengva suprasti, kad žaidimus $A(1)$ ir $A(2)$ pirmasis žaidėjas pralaimi, žaidimus $A(3)$ ir $A(4)$ — laimi. Žaidimą $A(5)$ laimi pirmasis žaidėjas, sujungdamas 1 ir 3 taškus.

Nagrinėkime žaidimus $A(n)$, kai $n = 4k + 2$, $k = 1, 2, \ldots$. Parodysime, kad juos laimi antrasis žaidėjas.

Galime įsivaizduoti, kad taškai (nekeičiant jų tarpusavio padėties) išdėlioti taip, kad yra taisyklingojo n-kampio viršūnės; tai žaidimo eigai ir baigčiai įtakos neturi. Pastebime, kad diametraliuose taškuose yra priešingo lyginumo skaičiai, todėl pirmasis žaidėjas pirmuoju ėjimu negali nubrėžti nė vieno skersmens.

Taigi po pirmo žaidėjo pirmo ėjimo antrasis gali mintyse išvesti ypatingą skersmenį — taškų aibės simetrijos ašį — taip, kad pirmojo žaidėjo nubrėžta styga būtų vienoje šios ašies pusėje (43 pav. pavaizduotos galimos situacijos, kai $n = 6$ ir $n = 10$).

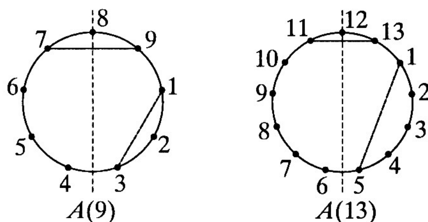


43 pav.

Toliau visus ėjimus galima atlikti arba vienoje, arba kitoje šio ypatingo skersmens pusėje. Kadangi simetriški vienas kitam skersmens atžvilgiu taškai yra priešingo lyginumo, tai į kiekvieną pirmojo žaidėjo ėjimą vienoje skersmens pusėje antrasis žaidėjas gali atsakyti simetrišku ėjimu kitoje pusėje. Analizuodami panašiai kaip ankstesniuose žaidimuose, gauname, kad šitaip žaisdamas laimi antrasis žaidėjas.

Panagrinėkime žaidimus $A(n)$, kai $n = 4k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Parodysime, kad dabar laimi pirmasis žaidėjas.

Savo pirmuoju ėjimu jis sujungia taškus n ir $n - 2$.



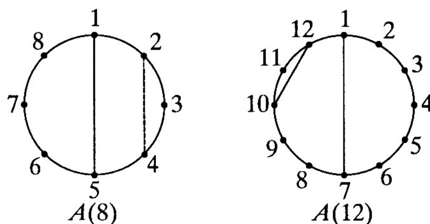
44 pav.

Kartu iš tolesnio žaidimo iškrinta taškas $n - 1$, ir žaidime toliau dalyvauja tiktai taškai, kurių numeriai yra $1, 2, \ldots, 4k - 2$.

Pastebėkime, kad $4k - 2 = 4(k - 1) + 2$, t. y. žaidimas supaprastintas iki jau išnagrinėto pirmojo atvejo, kai naudodamas simetriją ašies atžvilgiu laimi tas, kuris ėjimą atlieka antras. Kadangi šiame žaidimo tęsinyje antras yra pirmasis žaidėjas, tai jis ir laimi.

Dabar nagrinėkime žaidimus $A(n)$, kai $n = 4k$, $k = 1, 2, \ldots$. Parodysime, kad juos laimi pirmasis žaidėjas.

Savo pirmuoju ėjimu jis sujungia priešingus taškus 1 ir $2k + 1$ (vėl taškus galime laikyti taisyklingojo n-kampio viršūnėmis). Tolesnė analizė panaši į ankstesnių atvejų.

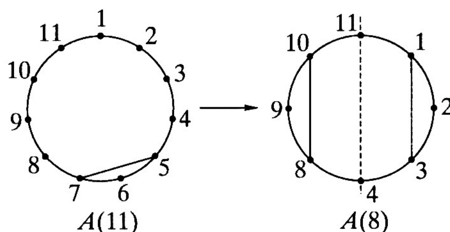


45 pav.

Dabar nagrinėkime žaidimus $A(n)$, kai $n = 4k + 3$, $k = 1, 2, \ldots$. Parodysime, kad juos taip pat laimi pirmasis žaidėjas.

Savo pirmuoju ėjimu jis sujungia taškus, kurių numeriai yra $2k + 1$ ir $2k+3$. Šiuo atveju iš žaidimo iškrinta taškas $2k+2$, ir tolesniame žaidime dalyvauja $4k$ taškai

$$1, 2, 3, \ldots, 2k, 2k + 4, 2k + 5, \ldots, 4k + 3.$$



46 pav.

Toliau pirmasis žaidėjas likusius taškus laiko taisyklingojo $4k$-kampio viršūnėmis. Pastebėję, kad negalima nubrėžti nė vieno skersmens, jis žaidžia panašiai, kaip ir nagrinėtu atveju.

Kadangi n dalijant iš 4 gaunamos liekanos 0, 1, 2 arba 3, tai visi galimi atvejai išnagrinėti.

UŽDAVINIAI

51. Du žaidėjai paeiliui laužo šokolado plytelę, kurios matmenys yra 5×6. Vienu ėjimu leidžiama laužti vieną iš gabalų (pirmu ėjimu — plytelę) vertikaliai arba horizontaliai (per griovelius tarp langelių). Laimi tas žaidėjas, kuris pirmasis atsilaužia gabalėlį, kurio matmenys 1×1. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

52. Stačiakampė lentelė sudaryta iš 10×16 langelių. Du žaidėjai paeiliui nutrina arba vieną eilutę, arba vieną stulpelį, jei jame yra nors vienas nenutrintas langelis. Pralaimi tas, kuris negali padaryti ėjimo. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimi? Katras žaidėjas laimėtų, jei lentelė būtų iš 10×15 langelių?

53. Apskritimu išdėliota 20 lempučių. Vienu ėjimu leidžiama sujungti bet kurias dvi lemputes tiesiu laidu, kuris nekerta anksčiau

sujungtų laidų. Tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

54. Dviejose saldainių dėžutėse yra po 20 saldainių. Vienu ėjimu leidžiama iš vienos dėžutės paimti bet kokį skaičių saldainių. Tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

55. Du žaidėjai paeiliui spalvina lentelės 8×8 langelius. Vienu ėjimu galima nuspalvinti arba vieną langelį, arba kelis langelius, kurie yra arba vienoje eilutėje, arba viename stulpelyje. Tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

56. Languotame popieriuje pažymėtas stačiakampis, kurio matmenys yra $m \times n$ ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$) langelių. Du žaidėjai A ir B paeiliui spalvina po vieną stulpelį arba eilutę, jei joje yra dar nenuspalvintų langelių. Laimi tas, kuris nuspalvina paskutinį langelį. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

57. Aikštėje namai stovi taisyklingojo 8-kampio viršūnėse. Bet kurie du namai yra sujungti takeliu. Dviejuose gretimuose namuose A ir B gyvena kiemsargiai, kurie turi nušluoti visus takelius. Jie šluoja po vieną takelį paeiliui. Kiemsargis A pradeda darbą pirmas. Šluojant takelius, reikia laikytis tokių taisyklių:

a) neiti takeliu jo nešluojant;
b) neiti nušluotu takeliu;
c) neiti tuo takeliu, kuriame yra kitas kiemsargis;
d) nevaikščioti šalia takelių.

Pralaimi tas, kuriam nelieka takelio, kurį galėtų šluoti. Kuris kiemsargis laimės?

4.3. PORŲ STRATEGIJA

Nagrinėtuose 4.2 ir 4.3 skyreliuose laimėjimo strategiją reikėjo realizuoti taip: į kiekvieną pirmo žaidėjo ėjimą antrasis turėjo atsakyti ėjimu, kuris priklausomas tiktai nuo ką tik padaryto priešininko ėjimo, o ne nuo prieš tai vykusios žaidimo eigos. Galėtume sakyti, kad visi galimi ėjimai buvo skirstomi poromis ir laimėjimo strategija buvo tokia: vienam žaidėjui atlikus kokį nors ėjimą G_1, kitas žaidėjas atlikdavo tokį ėjimą G_2, kuris su G_1 sudaro vieną porą. Pats jungimas į poras vyko remiantis geometrine sąvoka — simetrija.

Idėją apie ėjimų jungimą į poras galima realizuoti ir kitaip — nevartojant simetrijos sąvokos. Šiame skyrelyje išnagrinėsime kelis pavyzdžius, kaip tai daroma.

30 PAVYZDYS

Į eilę surašyti skaičiai nuo 1 *iki* 2002. *Du žaidėjai paeiliui trina po vieną skaičių tol, kol eilėje lieka tiktai du skaičiai (kiekvienu ėjimu galima nutrinti bet kurį iš likusių skaičių). Pirmojo žaidėjo tikslas yra žaisti taip, kad abu likę skaičiai turėtų bendrą daliklį, didesnį už* 1, *o antrasis žaidėjas stengiasi jam trukdyti. Ar antrasis žaidėjas gali sutrukdyti pirmojo ketinimams?*

Sprendimas. Antrasis žaidėjas mintyse suskirsto skaičius poromis $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\ldots$, $(2001, 2002)$. Jei pirmasis žaidėjas nutrina kurį nors skaičių iš bet kurios poros, tai antrasis žaidėjas atsako, nutrindamas jo poros antrąjį skaičių.

Taip žaisdamas antrasis žaidėjas kartu sugriauna pirmojo žaidėjo planus, nes galiausiai lieka du skaičiai, kurie skiriasi vienetu, o tada skaičių didžiausias bendrasis daliklis yra 1.

Antrasis žaidėjas naudojasi invariantine savybe — po jo ėjimo lieka tiktai neišskirtos poros. Tai kartu garantuoja, kad paskutiniai du skaičiai būtų iš vienos poros. Todėl pergalė atitenka antrajam žaidėjui.



58. Kvadratas padalytas į 8×8 langelius. Kairiajame apatiniame langelyje padėtas akmenukas. Du žaidėjai paeiliui kelia akmenuką į greta esantį langelį. Draudžiama kelti akmenuką į tokį langelį, kuriame jis jau kartą buvo (langeliai laikomi gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę). Tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi. Įrodykite, kad žaidėjas, kuris atlieka pirmąjį ėjimą, gali laimėti, nors ir kaip žaistų priešininkas.

59. Kvadratas padalytas į 4×4 langelius. Du žaidėjai paeiliui spalvina po vieną langelį. Langelius leidžiama spalvinti tiktai po vieną kartą. Pralaimi tas žaidėjas, po kurio ėjimo pirmą kartą atsiranda nuspalvintas koks nors kvadratas, sudarytas iš 2×2 langelių. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

60. Surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 1997. Jonas ir Andrius pakaitomis nutrina po vieną skaičių (pirmasis trina Jonas), kol lieka du nenutrinti skaičiai. Jonas nori, kad jų skirtumo modulis būtų lygus 999. Ar Jonas gali tai pasiekti?

61. Šachmatų lenta padalyta į $n \times n$ ($n \geqslant 2$) kvadratinių langelių. Jos kampe yra figūra. Du žaidėjai paeiliui perkelia figūrą į gretimą langelį. Draudžiama kelti figūrą į langelį, kuriame ji jau kartą pabuvojo. (Langeliai vadinami gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę). Tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi.

a) Įrodykite, kad pirmasis žaidėjas laimi, jei n yra lyginis skaičius, priešingu atveju laimi antrasis žaidėjas.

b) Katras žaidėjas laimi, jei iš pradžių figūra stovi ne kampiniame langelyje, o gretimame?

62. Plokštuma padalyta į kvadratinius langelius. Du žaidėjai paeiliui pažymi po vieną dar nepažymėtą langelį. Pirmasis deda ženklą „$\times$“, o antrasis — „o“. Laimi tas, kuris pirmas savo ženklais užpildo kurį nors iš 2×2 langelių sudarytą kvadratą. Katras žaidėjas, teisingai žaisdamas, laimės?

63. Išspręskite 57 uždavinį, jei kiemsargiai gyvena namuose, esančiuose tokiose dviejose 8-kampio viršūnėse, tarp kurių yra dar viena viršūnė.

46. Laimi antrasis žaidėjas, naudodamasis simetrija kvadrato centro atžvilgiu.

47. Teisingai žaisdamas, šį žaidimą laimės pirmasis žaidėjas. Pirmuoju ėjimu saldainį „Meška" jis padeda į centrinį kvadrato langelį. Po to į kiekvieną antrojo žaidėjo ėjimą jis atsako simetrišku centro atžvilgiu ėjimu.

Žaidimo pabaigoje jo saldainių daugiau yra ir centrinėje eilutėje, ir centriniame stulpelyje. Jei antrojo žaidėjo saldainių daugiau yra kurioje nors kitoje eilutėje (stulpelyje), tai pirmojo žaidėjo saldainių daugiau yra jai simetriškoje eilutėje (stulpelyje). Todėl necentrinėse eilutėse ir stulpeliuose nė vienas žaidėjas neįgyja persvaros.

48. Laimės pirmasis žaidėjas, savo pirmuoju ėjimu perdažęs vidurinį kamuoliuką ir po to perdažydamas kamuoliukus, išsidėsčiusius simetriškai vidurinio kamuoliuko atžvilgiu antrojo žaidėjo nudažytiems.

Kai yra 18 kamuoliukų, jis perdažo abu vidurinius kamuoliukus.

49. Teisingai žaisdamas, laimės pirmasis žaidėjas. Pirmuoju ėjimu jis turi nudažyti bet kokią atkarpą, kad į vieną ir į kitą pusę liktų vienodo ilgio baltos atkarpos. Kitais ėjimais pirmasis žaidėjas turi nudažyti atkarpas, simetriškas antrojo žaidėjo nudažytosioms.

50. Laimi antrasis žaidėjas. Jis kiekvienu ėjimu išsirenka tos pačios, kaip ir pirmasis žaidėjas, spalvos balioną, kurį pritvirtina prie viršūnės, simetriškos kubo centro atžvilgiu pirmojo žaidėjo išsirinktai viršūnei. Todėl žaidimo pabaigoje jokiose dviejose vienos briaunos viršūnėse pritvirtintų vienos spalvos balionų nebus.

51. Pirmasis žaidėjas savo pirmuoju ėjimu perlaužia plytelę į du gabalus, kurių matmenys yra 3×5.

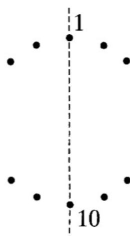
Iš pradžių jis daro simetriškus ėjimus, t. y. jei antrasis žaidėjas laužia dalį nuo vieno gabalo, tai pirmasis žaidėjas lygiai tokią pat dalį laužia nuo kito gabalo (ir vieta, ir gabalų skaičius sutampa).

Taigi antrasis žaidėjas pirmas nulauš juostelę, kurios plotis lygus 1. Į šį ėjimą pirmasis žaidėjas atsakys atsilauždamas nuo šios juostelės vieną kvadratėlį ir laimės.

52. Kai lentelė yra iš 10×16 langelių, laimi antrasis žaidėjas. Pirmajam žaidėjui nutrynus stulpelį, antrasis nutrina jam simetrišką. Pirmajam žaidėjui nutrynus eilutę, antrasis nutrina jai simetrišką eilutę. Tada ėjimų pritrūks pirmajam žaidėjui ir antrasis laimės.

Jei žaidėjai trina eilutes ir stulpelius lentelėje iš 10×15 langelių, tai žaidimą laimi pirmasis žaidėjas. Jis pirmuoju ėjimu nutrina vidurinį stulpelį ir toliau daro simetriškus ėjimus antrojo žaidėjo ėjimams. Tada ėjimų pritrūks antrajam žaidėjui.

53. Sprendžiant šį uždavinį, galima naudotis simetrija ašies atžvilgiu. Teisingai žaisdamas, laimi pirmasis žaidėjas. Jis pirmuoju ėjimu lemputes sujungia taip, kad abiejose sujungtų lempučių pusėse liktų vienodas skaičius lempučių, t. y. devynios. Po to į kiekvieną antrojo žaidėjo ėjimą jis atsako simetrišku ėjimu, sujungdamas atitinkamas lemputes simetrijos ašies priešingoje pusėje (47 pav.).



47 pav.

54. Šiame uždavinyje, naudodamasis simetrija, laimi antrasis žaidėjas.

Kadangi abiejose dėžutėse saldainių skaičius yra vienodas, tai kiekvienu ėjimu žaidėjui reikia paimti tiek saldainių, kiek jų paskutiniu ėjimu yra paėmęs pirmasis žaidėjas. Naudodamasis simetrija, antrasis žaidėjas ima saldainius iš kitos dėžutės. Šitaip žaisdamas, jis visada galės padaryti ėjimą.

55. Šį žaidimą, naudodamasis simetrija kvadrato centro atžvilgiu, gali laimėti antrasis žaidėjas. Pagalvokite patys, kodėl netinka simetrija kvadrato vidurio linijos atžvilgiu!

56. Čia reikia išskirti 3 atvejus:

1) Jei m ir n yra lyginiai skaičiai, tai laimi žaidėjas B, darydamas kiekvieną savo ėjimą, simetrišką vienos iš stačiakampio simetrijos ašių atžvilgiu žaidėjo A ėjimui.
2) Jei m ir n yra nelyginiai, didesni už 1 skaičiai, tai laimi žaidėjas B, po žaidėjo A pirmojo ėjimo, tarkime, eilutės nuspalvinimo, daro ėjimą — nuspalvina stulpelį. Tuomet uždavinys susiveda į prieš tai buvusį atvejį.
3) Jei vienas iš skaičių m ir n yra lyginis, o kitas — nelyginis, tai laimi žaidėjas A, pirmuoju ėjimu nuspalvinęs viduriniąją liniją ir į kiekvieną žaidėjo B ėjimą atsakydamas simetrišku ėjimu.

57. Teisingai žaisdamas, laimi name B gyvenantis kiemsargis. Jis mintyse per atkarpos AB vidurį išveda statmenį ir atlieka savo ėjimus, simetriškus šio statmens atžvilgiu A ėjimams. Įsitikinkite, kad ant vidurio statmens nėra nė vieno namo.

58. Pirmasis žaidėjas mintyse padalija kvadratą į stačiakampėlius, kurių matmenys yra 1×2 langeliai. Pirmuoju ėjimu jis perkelia akmenuką į antrąjį to stačiakampėlio, kuriame akmenukas yra iš pradžių, langelį, o po to į kiekvieną antrojo žaidėjo ėjimą atsako padėdamas akmenuką į to stačiakampėlio, į kurį savo paskutiniu ėjimu bus padėjęs antrasis žaidėjas, antrąjį langelį.

59. Sužymėkime langelius 8 raidėmis a, b, c, d, e, f, g, h, kaip parodyta 48 paveiksle.

a	b	c	d
e	f	g	h
a	b	c	d
e	f	g	h

48 pav.

Matome, kad jokio kvadrato 2×2 langeliuose nėra dviejų vienodų raidžių.

Antrasis žaidėjas laimės, jei kiekvieną kartą nuspalvins langelį su tokia pat raide, kuri yra pirmojo žaidėjo ką tik nuspalvintame langelyje.

60. Taip, gali.

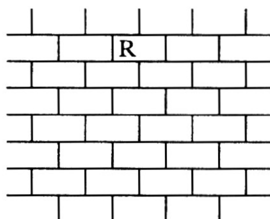
Pirmuoju ėjimu Jonas nutrina skaičių 999 (vidurinį pagal didumą). Toliau neišbrauktus skaičius jis mintyse suskirsto poromis (1, 1000), (2, 1001), (3, 1002), ... , (998, 1997). Jei Andrius nutrina kurį nors skaičių, Jonas savo ėjimu nutrina antrąjį tos pačios poros skaičių. Aišku, kad galiausiai lieka nenutrinti du vienos poros skaičiai, kurių skirtumas lygus 999.

61. a) Kai n yra lyginis skaičius, laimi pradedantysis. Jis gali pasinaudoti strategija, aprašyta 58 uždavinio sprendime, ir laimėti. Kai n — nelyginis, pirmajam žaidėjui padarius ėjimą, susidaro situacija, aprašyta b) atveju.

b) Kai n — lyginis skaičius, pradedantysis naudoja tą pačią strategiją kaip a) atveju ir laimi. Kai n — nelyginis skaičius, taip pat laimi pradedantysis. Jis mintyse visą lentą padalija į stačiakampėlius, kurių matmenys 1×2, atmesdamas tą kampinį langelį, šalia kurio iš pradžių stovi figūra. Jei parodysim, kad antrasis žaidėjas niekada negali eiti į šį kampinį langelį, tai įsitikinsime, kad pradedantysis laimi naudodamasis ta pačia strategija kaip prieš tai. Bet tai lengva suprasti nuspalvinus langelius šachmatiškai. Matome, kad antrasis žaidėjas visuomet eina į priešingos spalvos langelį negu šis kampinis.

62. Parodysime, kad žaidimas, teisingai jį žaidžiant, baigiasi lygiosiomis. Lygiąsias gali pasiekti antrasis žaidėjas.

Antrasis žaidėjas visą plokštumą mintyse padalija į 1×2 stačiakampėlius, kaip parodyta 49 paveiksle.

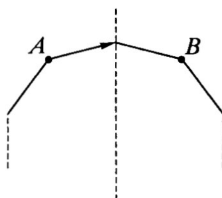


49 pav.

Jei pirmasis žaidėjas įrašo savo ženklą kuriame nors langelyje R, tai antrasis tuoj pat įrašo savo ženklą langelyje, kuris yra tame pačiame stačiakampėlyje su R.

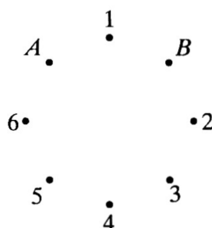
Kadangi kiekviename kvadrate 2×2 telpa vienas stačiakampėlis, tai kiekviename kvadrate, kuris gausis visiškai užpildžius lentelę, bus ir bent vienas antrojo žaidėjo ženklas. Taigi jis nepralaimės.

63. Ankstesnės (57 uždavinio) strategijos tiesiogiai taikyti negalima: gali atsitikti, kad, šluojant takelį, simetrišką ką tik nušluotajam, kiemsargis *B* eis prie namo, prie kurio yra kiemsargis *A* (50 pav.), ir jam gali nebeužtekti takelių.

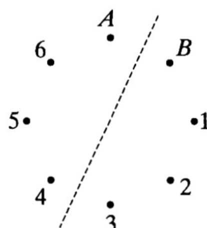


50 pav.

Antrasis kiemsargis gali laimėti, naudodamasis tokia strategija: priskirti visiems 6 likusiems namams numerius nuo 1 iki 6 (51 pav.) ir popieriuje nusibraižyti kitą taisyklingąjį 8-kampį (52 pav.).



51 pav.



52 pav.

Jei pirmasis kiemsargis nušluoja kurį nors takelį, parodytą 51 paveiksle, tai antrasis pažymi kelią tarp namų su tais pačiais numeriais 52 paveiksle, suranda jame simetrišką takelį ir nušluoja takelį su tais pačiais numeriais 51 paveiksle. Taip antrasis kiemsargis turi elgtis ir toliau. Trumpiau galime pasakyti, kad jis realią situaciją iš 51 paveikslo perkelia į 52 paveikslą, kuriame naudojasi simetrija kaip ir sprendžiant 57 uždavinį. Po to šią strategiją jis įgyvendina tikrovėje (51 pav.).



NEAPSIRIKIME

Supažindinęs su invariantų metodu, mokytojas pasiūlė matematikos būrelio nariams išspręsti tokį uždavinį.

31 PAVYZDYS

Lentoje užrašytas skaičius 1998. *Vienu ėjimu prie jo galima arba pridėti* 12, *arba atimti* 18. *Ar atlikus šiuos ėjimus daug kartų galima gauti skaičių* 998?

Beveik vienu metu rankas pakėlė Jonukas ir Petriukas.

JONUKO SPRENDIMAS. Užrašytasis skaičius yra lyginis. Ir 12, ir 18 taip pat yra lyginiai skaičiai. Prie lyginio pridėjus arba iš jo atėmus lyginį skaičių, gaunamas lyginis skaičius. Todėl lentoje visą laiką bus tiktai lyginiai skaičiai. Ir 998 yra lyginis skaičius. Taigi jį galima gauti nurodytais veiksmais.

PETRIUKO SPRENDIMAS. Lentoje užrašytas skaičius dalijasi iš 3. Be to, 12 ir 18 taip pat dalijasi iš 3. Prie skaičiaus, kuris dalijasi iš 3, pridėjus arba iš jo atėmus skaičių, kuris dalijasi iš 3, vėl gaunamas skaičius, kuris dalijasi iš 3. Taigi lentoje visą laiką bus tiktai tokie skaičiai, kurie dalijasi iš 3. Bet skaičius 998 iš 3 nesidalija. Vadinasi, jo negalima gauti nurodytais veiksmais.

Katras iš jų yra teisus? Na, žinoma, Petriuko sprendimas yra teisingas, o Jonuko — klaidingas.

Jonukas savo sprendime rėmėsi savybe „yra lyginis skaičius". Jis

pastebėjo, kad šią savybę turi visi skaičiai, kuriuos galima gauti iš pradinio skaičiaus, taip pat ir skaičius 998. Jonukas konstatavo, kad nurodyti pertvarkymai nekeičia skaičiaus lyginumo ir netrukdo gauti 998. Bet iš to dar negalima daryti galutinės išvados. Pasirodo, šio skaičiaus gauti neįmanoma!

Tai savo sprendime įrodė Petriukas. Dalumas iš 3 yra savybė, kuri parodo, kad skaičiaus 998 nurodytais ėjimais gauti negalima.

Panaši situacija susiklostytų, jei Jonukui ir Petriukui reikėtų išsiaiškinti, ar takelyje per džiungles iš Mumbo kiemo į Jumbo kiemą nėra jokio pavojaus. Jonukas, chemiškai išanalizavęs oro sudėtį, neklysdamas pasakytų, kad arti takelio nėra nė vieno liūto, ir padarytų išvadą, kad takeliu galima eiti. Tuo tarpu Petriukas, remdamasis ta pačia analize, bet domėdamasis jaguarais nustatytų, kad už 10 metrų nuo takelio guli jaguarų šeima. Kurio berniuko išvada yra teisinga, galite spręsti patys.

Beje, dabar labai pravartu grįžti prie 34 b) uždavinio sprendimo — ten taip pat teko ieškoti „teisingos“ invariantinės savybės.

Taigi atsiminkite: jeigu pavyksta rasti savybę,

1) kurią turi pradiniai dydžiai,
2) kuri yra invariantinė, t. y. ją turi dydžiai, gaunami atliekant nurodytas operacijas,
3) ją turi tie dydžiai, kuriuos norima gauti kaip atliekamų operacijų rezultatą,

tai dar negalima daryti išvados, kad galutinį rezultatą tikrai galima gauti.

Suprantama, neverta pulti į kraštutinumus ir manyti, kad visose tokiose situacijose pageidaujamo rezultato negalima gauti. Išnagrinėkime pavyzdį.

32 PAVYZDYS

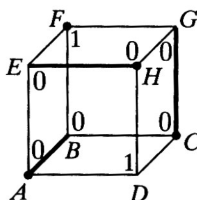
Dviejose priešingose kubo viršūnėse įrašyti vienetai, o likusiose — nuliai. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurią kubo briauną ir prie jos abiejuose galuose parašytų skaičių pridėti po 1. *Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visose viršūnėse įrašyti skaičiai būtų lygūs?*

Sprendimas. Nuspalvinkime kubo viršūnes taip, kaip spręsdami 15 pavyzdį (53 pav.). Lygiai taip pat kaip tada gauname tris teiginius:

1) nuspalvintose ir nenuspalvintose viršūnėse skaičių sumos iš pradžių yra lygios;
2) po kiekvieno ėjimo šios sumos padidėja vienetu, todėl išlieka lygios;
3) siekiamoje situacijoje šios sumos taip pat lygios.

Mes jau žinome, kad iš šių 3 teiginių nereikia skubėti daryti išvados, jog visus skaičius galima sulyginti! Tad ieškokime kito sprendimo.

Sakykime, kad iš pradžių viršūnėse F ir D yra vienetai, o kitose — nuliai (53 pav.).



53 pav.

Prie briaunų EH, GC ir AB galų pridėję po vienetą, gausime pageidaujamą rezultatą.

Taigi įsitikinome, jeigu uždavinys net ir labai panašus į spręstiną invariantų metodu, tai iš tikrųjų invariantų metodo (kaip ir bet kurio kito) ne visada pakanka, ir tenka ieškoti kitų būdų.